GRUPOS

I. OPERACIONES CERRADAS

1. Dadas las siguientes operaciones, analice si son cerradas en los conjuntos indicados:

a) a*b = a . b + 3 en $\mathbb{Z}$

b) x*y = $\sqrt{x^2 + y^2}$ en $\mathbb{R}$

c) a*b = $\frac{a+b}{2}$ en $\mathbb{Q}$

d) a*b = mcd(a,b) en $\mathbb{N}$

e) x*y = $x + \frac{1}{y}$ en $\mathbb{Q}$

f) x*y = $x + 2 . y - \frac{2}{3}$ en $\mathbb{Q}$

g) a*b = 2 . a – b en $\mathbb{N}$

h) (x,y)*(z,t) = (x+t , y.z) en $\mathbb{R}^2$

i) X * Y = X ∪ Y en $\wp$ (A) con A ≠∅

j) A * B = A ^ B en $\{0,1\}^{n \times m}$

k) A * B = A ● B en $\mathbb{R}^{2x2}$

l) a*b = a^b en $\mathbb{N}$

2. Indicar si en los conjuntos indicados, las siguientes operaciones son cerradas:

a) En A = { x ϵ $\mathbb{Z}$ / x = 3 . k, con k ϵ $\mathbb{Z}$ }, a*b = a + b

b) En B = { x ϵ $\mathbb{Z}$ / x = 2 . k + 1 , con k ϵ $\mathbb{Z}$ }, a*b = a . b

c) En C = { x ϵ $\mathbb{Q}$ / x = 2^k, con k ϵ $\mathbb{Z}$ }, a*b = a + b

d) En D = { x ϵ $\mathbb{Q}$ / x = 5^k, con k ϵ $\mathbb{Z}$ }, a*b = a . b

e) En E = { x ϵ $\mathbb{Z}$ / x es primo }, a*b = a + b

3. Dadas las siguientes operaciones a través de sus tablas, analizar si son cerradas, conmutativas, si poseen elemento neutro, elemento absorbente, elementos idempotentes y si todos tienen simétricos:

a) A = {a,b,c}

*	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	a
c	b	c	a

b) A = {1,2,3,4}

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

c) A = {a,b,c}

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

d) A = {x,y,z,w}

*	x	y	z	w
x	x	x	z	z
y	x	y	z	w
z	z	z	z	z
w	z	w	z	w

4. Para las siguientes operaciones cerradas en los conjuntos indicados, analizar si son asociativas, conmutativas, si tienen elemento neutro y si todos los elementos poseen simétrico:

a) a*b = a + b + a.b en $\mathbb{Z}$

b) x*y = $x^2 + y^2$ en $\mathbb{R}$

c) a*b = $\frac{a+b}{2}$ en $\mathbb{Q}$

d) x*y = 3 . (x + y) en $\mathbb{Q}$

e) a*b = 2 . a + b en $\mathbb{Z}$

f) a*b = a^b en $\mathbb{N}$

5. Indicar V o F, justificando:

a) Si * es cerrada en un conjunto A ^ B ⊆ A => * es cerrada también en B

b) Si * es cerrada en un conjunto B ^ B ⊆ A => * es cerrada también en A

c) Si * es asociativa en un conjunto A ^ B ⊆ A => * es asociativa en B

d) Si * tiene neutro en un conjunto A ^ B ⊆ A => * tiene neutro en B

e) Si * es conmutativa en un conjunto B ^ B ⊆ A => * es conmutativa en A

f) Si * es conmutativa en un conjunto A => * es asociativa también en A

g) Si * no tiene neutro en un conjunto A => * no es conmutativa en A.

II. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. PROPIEDADES

6. Indicar si los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas alcanzan la estructura de semigrupo o grupo, si tienen elemento neutro y si son abelianos.

a) $(\mathbb{Z}\,,\ \cdot\,)$

b) $(\mathbb{R} - \{0\}\,,\ \cdot\,)$

c) $(\mathbb{Q}\,, +\,)$

d) $(\{0,1\}^{2x3}\,,\ \vee)$

e) $(\wp(A)\,,\ \cap)$

f) $(\mathbb{N}\,,\ \wedge\,)$

g) $(\mathbb{Z}\,,\ *\,)$ siendo a*b = a + b + 1

h) $(\{1, -1, i, -i\},\ \cdot\,)$ recordar que $i^2 = -1$

i) $(D_{18},\ *\,)$ siendo x*y = mcd (x,y)

j) $(\mathbb{Z}X\mathbb{Z}\,,\ *\,)$ siendo (x,y)*(z,t) = (x + z , y . t)

k) $(\mathbb{Z}_7\,, \bar{+}\,)$

l) $(\mathbb{Z}_8\,, \bar{\cdot}\,)$

m) $(\{X, -X, I, -I\}\,,\ \cdot\,)$, siendo $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

n) $(\{X, -X, I, -I\}\,,\ \cdot\,)$, siendo $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

o) $(S_3\,,\ \circ\,)$, siendo S_3 = { f: {1,2,3} → {1,2,3} / f es biyectiva}

p)

*	X	Y	Z
X	Y	X	Z
Y	X	Z	Y
Z	Z	Y	X

q)

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	e	d	a	c
c	c	a	e	b	d
d	d	c	a	e	b
e	e	d	b	c	a

7. Sea (A,*) un grupo con neutro e, demostrar:

   a) El elemento neutro e es único
   b) El elemento neutro es su propio simétrico: e ‘ = e
   c) Propiedad involutiva del simétrico: ∀ a ϵ A: (a ‘) ‘ = a
   d) El simétrico de un elemento es único.
   e) ∀a,b ϵ A: (a*b) ‘ = b ‘ * a ‘
   f) Las ecuaciones a*x = b y x*a = b tienen solución única
   g) El único elemento idempotente es el neutro. Es decir, si a*a=a => a=e
   h) ∀ a,b ϵ A: a ‘ = b => b ‘ = a

8. Sean (G_1 , $*_1$) y (G_2 , $*_2$) dos grupos con neutros e_1 y e_2 respectivamente. En el conjunto G_1 X G_2, se define la siguiente operación * tal que:

$$(a,b)*(c,d)= (a *_1 c , b *_1 d)$$

Demostrar que (G_1 X G_2 , *) es grupo

9. En base al ejercicio 7.f), completar las tablas de los siguientes grupos finitos:

(G = {1,2,3,4,5,6} , *)

*	1	2	3	4	5	6
1						
2			5	6		4
3		4	1		6	5
4		3			1	
5			2	1	4	
6		5			2	1

(G = {e,a,b,c,d} , ●)

*	e	a	b	c	d
e	e				
a		b			e
b		c	d	e	
c		d			b
d					

10. Indicar V o F, justificando:

    a) Si (A,*) es un semigrupo, entonces (INV(A),*) es grupo
    b) [Si (A,*) es un semigrupo ^ ∀ a,b,c, ϵ A: a*b = a*c] => b = c
    c) Si (G,*) es grupo entonces (G,◊) es grupo con x ◊ y = y * x
    d) Si (G,*) es grupo ^ ∀ x ϵ G : x * x = e => G es abeliano
    e) [Si (G,*) es grupo ^ ∃ x ϵ G: x * x = e] => x = e
    f) Si (G,*) es grupo ^ |G| es par => ∃ x ϵ G: x ≠ e ^ x = x ‘

III. SUBGRUPOS. SUBGRUPOS CÍCLICOS. GENERADORES

11. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos H son subgrupos del grupo indicado. Demostrar o justificar, según corresponda:

    a) H = { x = 5 . k, con k ϵ $\mathbb{Z}$ } de ($\mathbb{Z}$, +)
    b) H = { x = 2 . k + 1 , con k ϵ $\mathbb{Z}$ } de ($\mathbb{Q} - \{0\}$, ●)
    c) H = { x = a + $\sqrt{2}$ b, con a, b ϵ $\mathbb{R}$ } de ($\mathbb{R}$, +)

d) H = { A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$ / A = $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$ 5, con x,y ∈ $\mathbb{R}$ } de ($\mathbb{R}^{2x2}$, +)

e) H = { A ∈ $\mathbb{R}^{2x2}$ / A = $\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ 5, con x,y ∈ $\mathbb{R}$ } de ($\mathbb{R}^{2x2}$, +)

f) H = { (0,y) / y ∈ $\mathbb{Z}$ } de ($\mathbb{Z}$X $\mathbb{Z}$, +)

g) H = { x ∈ $\mathbb{Q}$ / x = 3^k , con k ∈ $\mathbb{Z}$ } de ($\mathbb{Q} - \{0\}$, ●)

12. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos H son subgrupos del grupo indicado. Demostrar o justificar, según corresponda

a) H = { $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}$ } de $(\mathbb{Z}_6, \overline{+})$

b) H = { f_1, f_2, f_3 } de (S_3 , ○)

c) H = { $\overline{1}, \overline{7}$ } de (INV($\mathbb{Z}_{15}$) , ●)

d) H = { $\overline{1}, \overline{17}$ } de (INV($\mathbb{Z}_{18}$) , ●)

e) H = { 1 , i } de ({1,-1,i,-i} , ●)

f) H = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ de ($M_2(\mathbb{R})$, ●) matrices inversibles de orden 2

13. Sea (G,*) un grupo, H_1, H_2 dos subgrupos de G. Indicar V o F, justificando:

a) $H_1 \cup H_2$ es subgrupo de (G,*)

b) $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de (G,*)

c) H_1 - H_2 es subgrupo de (G,*)

d) Si G es abeliano: T = { x = $x_1 * x_2$, con $x_1 \in H_1$ ^ $x_2 \in H_2$ } es subgrupo de (G,*)

14. Indicar cuáles de los siguientes grupos son cíclicos. En caso de serlo, indicar todos sus generadores.

a) ($\mathbb{Z}$, +)

b) (A = { a, b, c, d) , *)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

c) (B = { x, y, z, u, v, w } , *)

*	x	y	z	u	v	w
x	x	y	z	u	v	w
y	y	z	x	v	w	u
z	z	x	y	w	u	v
u	u	w	v	x	z	y
v	v	u	w	y	x	z
w	w	v	u	z	y	x

d) $(\mathbb{Z}_7, \overline{+})$

e) $(INV(\mathbb{Z}_8), \overline{\cdot})$

15. Dados los siguientes grupos, hallar todos los subgrupos y graficar la red de subgrupos con la inclusión.

a) $(\mathbb{Z}_{12}, \mp)$

b) $(\mathbb{Z}_{30}, \mp)$

c) $(\mathbb{Z}_2 X \mathbb{Z}_4, \mp)$

d) $(\{1, -1, i, -i\},\ .\ )$

e) $(INV(\mathbb{Z}_8),\ .\ )$

f) $(S_3,\ o\ )$

IV. RELACIONES DE EQUIVALENCIA COMPATIBLE. SUBGRUPO NORMAL. GRUPO COCIENTE

16. Analizar si las siguientes relaciones de equivalencia son compatibles con la estructura indicada

a) $a\ R\ b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ con la estructura del grupo $(\mathbb{Q} - \{0\}, \bullet)$

b) $a\ R\ b \Leftrightarrow 5 \mid (a-b)$ con la estructura del grupo $(\mathbb{Z}, +)$

c) $(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow b = d$ con la estructura del grupo $(\mathbb{Z}_2 X \mathbb{Z}_4, +)$

d) La relación $R = \{ (a,c), (c,a), (b,d), (d,b) \} \cup \Delta A$ en (A = { a , b , c , d } , *)

*	d	b	a	c
d	d	b	a	c
b	b	d	c	a
a	a	c	d	b
c	c	a	b	d

17. Indicar si los siguientes subgrupos de los grupos dados son normales. En caso afirmativo, hallar el grupo cociente, de lo contrario, de las particiones a derecha e izquierda. Justificar.

a) $H = \langle \bar{2} \rangle$ en $(\mathbb{Z}_{10}, \mp)$

b) $H = \{f_1, f_6\}$ en $(S_3, \circ)$

c) $H = \langle \bar{4} \rangle$ en $(INV(\mathbb{Z}_{15}), \bullet)$

d) $H = \langle -1 \rangle$ en $(A = \{1, -1, i, -i\}, \bullet)$

e) $H = \{ (x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ en $(\mathbb{R}^2, +)$

f) $H = \{a, g\}$ en el grupo $(A, \otimes)$ dado por la siguiente tabla

$\otimes$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	h	g	e	f
c	c	d	a	b	f	e	h	g
d	d	a	b	c	g	h	f	e
e	e	g	f	h	a	c	b	d
f	f	h	e	g	c	a	d	b
g	g	f	h	e	d	b	a	c
h	h	e	g	f	b	d	c	a

18. Indicar V o F, justificando:

a) Un grupo de cardinal 32 puede tener un subgrupo de orden 6.

b) El índice del subgrupo $H = \langle \overline{12} \rangle$ en $(\mathbb{Z}_{36}, +)$ es 3.

c) Si G es un grupo y H un subgrupo de G, tales que | G | = 2k ^ | H | = k, entonces H es subgrupo normal de G.

d) Los grupos de cardinales primos no tiene subgrupos propios.

e) Si H, K son subgrupos de un grupo finito G, tales que | H | = 36 y | K | = 24, los posibles órdenes de H $\cap$ K son 2 y 3 únicamente.

f) El elemento del grupo (M_2 (Q) , •) es de orden 4.

Nota: (M_2 (Q) , •) es el grupo de matrices de 2x2 inversibles con coeficientes racionales.

V. HOMOMORFISMOS. GRUPOS ISOMORFOS.

19. Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos de grupos. En caso afirmativo, clasificarlos y hallar el núcleo:

a) $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (3\mathbb{Z}, +) \,/\, f(x) = 3.X$

b) $g : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_4, +) \,/\, g(x) = \bar{x}_{(4)}$

c) $t: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \bullet) \,/\, t(x) = e^x$

d) $h : (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +) \,/\, h(x) = \left(\bar{x}_{(2)}, \bar{x}_{(3)}\right)$

20. Considerar el grupo ($INV(\mathbb{Z}_8)$, •) y analizar si es isomorfo al siguiente:

*	d	b	a	c
d	d	b	a	c
b	b	d	c	a
a	a	c	d	b
c	c	a	b	d

Si lo es, definir el isomorfismo, de lo contrario, justificar.

21. Considerar el grupo ($INV(\mathbb{Z}_{14})$, •) y analizar si es isomorfo a ($\mathbb{Z}_6$, +). Si lo es, definir el isomorfismo, si no, justificar.

22. Demostrar que si (G , *) es un grupo abeliano entonces la función *f : G → G / f(x) = x ’* es un isomorfismo.

23. Considerar los grupos (G_1 , *) y (G_2 , +) con neutro e_1 , e_2 respectivamente. Si F : $G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos. Se pide definir el núcleo y probar que es un subgrupo normal de G.

VI. EJERCICIOS COMBINADOS O INTEGRADORES (TIPO EXAMEN)

24. Sea (G , *) un grupo dado por la siguiente tabla:

*	a	b	c	d	e	f
a	c	f	d	a	b	e
b	f	d	e	b	c	a
c	d	e	a	c	f	b
d	a	b	c	d	e	f
e	b	c	f	e	a	d
f	e	a	b	f	d	c

a) Indicar si es un grupo cíclico, justificando correctamente. En caso afirmativo, indicar todos los generadores.

b) Considerar el subgrupo generado por b y hallar el grupo cociente (conjunto cociente y tabla de su operación)

25. Considerar el grupo (A = { 0 , 2 , 4 , 6 } , *) con la operación dada por:

$$a * b = \begin{cases} a+b \,, si\ a+b \leq 6 \\ a+b-8 \,,\ \ si\ a+b > 6 \end{cases}$$

a) Hacer la red de subgrupos

b) Considerar también el grupo multiplicativo de los inversibles de $\mathbb{Z}_4$. Definir en el conjunto INV($\mathbb{Z}_4$)X A la operación del grupo producto, indicar el neutro, el simétrico de cada elemento.

c) Hallar el grupo cociente para H = < (3 , 2) >

26. Sean los grupos: (A = { 1 , -1 } , •) y (B = $\mathbb{Z}_4$, +)

a) Definir * para que (A X B , *) sea grupo.

b) Indicar si (A X B , *) es grupo abeliano y si es cíclico. Justificar.

c) Analizar si (A x B , *) es isomorfo a ($\mathbb{Z}_8$, +). En caso de serlo, definir el isomorfismo, de lo contrario, justificar.

27. Dado el conjunto F = { f_1 = x , f_2 = 1/x , f_3 = - x , f_4 = - 1/x } formado por algunas funciones definidas de $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$:

a) Demostrar que es un grupo bajo la composición de funciones *(f ₒ g)(x) = f[g(x)]*

b) Analizar si el grupo anterior es isomorfo al siguiente:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Si lo es, mostrar el isomorfismo.

Caso contrario, justificar correctamente

28. Sea el grupo ($\mathbb{Z}_2$ X $\mathbb{Z}_4$, *) con *(a,b) * (c,d) = (a $+_2$ c ; b $+_4$ d)* y el subconjunto H={(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)}:

a) Analizar si H es subgrupo de ($\mathbb{Z}_2$ X $\mathbb{Z}_4$, *). Si lo es, indicar si H es o no cíclico y si es o no subgrupo normal.

b) Analizar si (H , *) es isomorfo al siguiente grupo (justificando):

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

29. Para el conjunto A = { a^0 , a^1 , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 } con operación * definida:

$$a^n * a^m = a^{n+m} \text{ si } n+m < 6 \quad y \quad a^n * a^m = a^{n+m-8} \text{ si } n+m \geq 6$$

a) Probar que (A , *) es un grupo conmutativo.

b) Hallar todos los subgrupos y su red. Analizar si es Álgebra de Boole.

c) Considerar el subgrupo generado por a^2, hallar el conjunto cociente y verificar que es un grupo. Justificar cada afirmación.

30. Sea (G , *) grupo dado por la siguiente tabla:

*	D	I	S	N	E	Y
D	D	I	S	N	E	Y
I	I	D	E	Y	S	N
S	S	N	D	I	Y	E
N	N	S	Y	E	D	I
E	E	Y	I	D	N	S
Y	Y	E	N	S	I	D

a) Calcular todos los subgrupos de G. Dibujar la red de subgrupos e indicar si G es un grupo cíclico.

b) Considerar el subgrupo generado por S y hallar las particiones que produce en G a derecha e izquierda. ¿Es subgrupo normal? Si no lo es, indicar uno que lo sea.

c) ¿Es el grupo dado isomorfo a ($\mathbb{Z}_2$ X $\mathbb{Z}_3$, +)? Si lo es, definir dicho isomorfismo. Si no, justificar por qué no lo es.

31. Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de ($\mathbb{Z}$, +).

a) Probar que: $H = H_1 + H_2 = \{ x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in H_1 \wedge x_2 \in H_2 \}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$.

b) ¿Es H un subgrupo normal? Justificar.

32. Sea (G , *) un grupo y H_i una familia de subgrupos de G. Demostrar que la intersección de todos esos subgrupos es un subgrupo de G.

33. Considerar el grupo GM_2 (Q) formado por las matrices inversibles de 2x2 con coeficientes racionales y la operación producto matricial.

a) Mostrar que la matriz A tiene orden 4. Dar el conjunto que genera y probar que es un grupo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Indicar si el subgrupo generado por la matriz A es isomorfo al 4-grupo de Klein. Justificar.

34. Se sabe que:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & w^2 \\ w & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & w \\ w^2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

con $w^3 = 1 \wedge w \neq 1$, alcanza la estructura de grupo bajo la multiplicación de matrices. Indicar el orden de los posibles subgrupos, hallar el subgrupo generado por A e indicar si dicho subgrupo es normal. En caso afirmativo, hallar el grupo cociente asociado.

$$A = \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

I OPERACIONES CERRADAS

1) Dadas las sig. operaciones, analizar si son cerradas en los conjuntos indicados

a) $a*b = a \cdot b + 3$ en $\mathbb{Z}$

$¿\forall a,b \in \mathbb{Z}: a*b \in \mathbb{Z}?$

$a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z} \wedge 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underbrace{\overbrace{a \cdot b}^{\in \mathbb{Z}} + \overset{\in \mathbb{Z}}{3}}_{a*b \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ ✓

es cerrada en $\mathbb{Z}$

b) $x*y = \sqrt{x^2+y^2}$ en $\mathbb{R}$

$\forall x,y \in \mathbb{R}: (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 \in \mathbb{R})$

$x^2 \in \mathbb{R}, y^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+y^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{(x^2+y^2)} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x*y \in \mathbb{R}$ ✓

$*$ es cerrada en $\mathbb{R}$

c) $a*b = \frac{a+b}{2}$ en $\mathbb{Q}$

$\forall a,b \in \mathbb{R}: a+b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \overset{\in \mathbb{Q}}{(a+b)} \cdot \overset{\in \mathbb{Q}}{\frac{1}{2}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a*b \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ $*$ es cerrada

d) $a*b = mcd(a,b)$ en $\mathbb{N}$

$\forall a,b \in \mathbb{N}: mcd(a,b) = m, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a*b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $*$ es cerrada en $\mathbb{N}$

e) $x*y = x + \frac{1}{y}$ en $\mathbb{Q}$

$\forall x,y \in \mathbb{Q}$: $\frac{1}{y}$ puede no pertenecer a $\mathbb{Q}$ (si $y=0 \Rightarrow \frac{1}{y} \notin \mathbb{Q}$)

$*$ NO es cerrada en $\mathbb{Q}$

f) $x*y = x + 2 \cdot y - \frac{2}{3}$ en $\mathbb{Q}$

$\forall x,y \in \mathbb{Q}: 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2y \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x+2y) \in \mathbb{Q}, \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left[(x+2y) - \frac{2}{3}\right] \in \mathbb{Q}$

$x*y \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ $*$ es cerrada en $\mathbb{Q}$

g) $a*b = 2 \cdot a - b$ en $\mathbb{N}$

$*$ NO es cerrada pues si $b > 2a \Rightarrow \notin \mathbb{N}$

$\begin{matrix} a=1 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{2a}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{b}_{\in \mathbb{N}} = 2 \times 1 - 4 = \underbrace{-2}_{\notin \mathbb{N}}$

h) $(x,y) * (z,t) = (x+t, y.z)$ en $\mathbb{R}^2$

$\forall (x,y),(z,t) \in \mathbb{R}^2 : x,y,z,t \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+t) \in \mathbb{R} \wedge (y.z) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow ((x+t),(y.z)) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y)*(z,t) \in \mathbb{R}^2$

$\boxed{* \text{ es cerrada en } \mathbb{R}^2}$

i) $X*Y = X \cup Y$ en $\mathcal{P}(A)$ con $A \neq \emptyset$

$\forall X,Y \in \mathcal{P}(A) : X \cup Y \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X*Y \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow \boxed{* \text{ es cerrada en } \mathcal{P}(A)}$

j) $A*B = A \wedge B$ en $\{0,1\}^{m \times m}$

$\forall A,B \in \{0,1\}^{m\times m} : A \wedge B \in \{0,1\}^{m\times m}$ $\boxed{* \text{ es cerrada}}$

k) $A*B = A.B$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$\forall A,B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A.B \Rightarrow \forall \overbrace{a_{ij}}^{\in \mathbb{R}} \wedge \overbrace{b_{ji}}^{\in \mathbb{R}}, \overbrace{a_{ij} \cdot b_{ji}}^{c_{ij}} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow c_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow A*B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \boxed{* \text{ es cerrada}}$

l) $a*b = a^b$ en $\mathbb{N}$

$\forall a,b \in \mathbb{N} : a^b : b=1 \Rightarrow a^b = a \in \mathbb{N}$ /

$b=2 \Rightarrow a^b = \underbrace{(a.a)} \in \mathbb{N}$

$b=3 \Rightarrow a^3 = \underbrace{(a.a)}_{\in \mathbb{N}} . \underbrace{a}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow \in \mathbb{N}$

$a^b \in \mathbb{N} \Rightarrow a*b \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{* \text{ es cerrada}}$

U.8

2 Indique si en los conjuntos indicados, las sig. operaciones son cerradas:

a) En $A = \{x \in \mathbb{Z} / x = 3.k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b$

$\forall x, y \in A$: $x = 3.k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z} \wedge y = 3k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 3k_1 + 3k_2 = 3\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_3 \in \mathbb{Z}} = 3k_3 \Rightarrow (x+y) \in A$

$\boxed{* \text{ es cerrada en } A}$

b) En $B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2.k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a . b$

$\forall x, y \in B$: $x = 2k_1 + 1 \wedge y = 2k_2 + 1$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x . y = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 =$

$= 2\underbrace{(2k_1k_2 + k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} + 1 = 2k_3 + 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y \in B$

$\boxed{* \text{ es cerrada en } B}$

c) En $C = \{x \in \mathbb{Q} / x = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a + b$

$x = 2^{k_1}$, $y = 2^{k_2}$ $\Rightarrow$ si tomo $k_1 = 2$ y $k_2 = 3 \Rightarrow x + y = 2^2 + 2^3 = 12 \neq 2^{k_3}$

$\boxed{* \text{ NO es cerrada}}$

d) En $D = \{x \in \mathbb{Q} / x = 5^k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$, $a * b = a . b$

$\forall x y \in D$: $x = 5^{k_1} \wedge y = 5^{k_2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x . y = 5^{k_1} . 5^{k_2} = 5^{\overbrace{k_1 + k_2}^{\in \mathbb{Z}}} = 5^{k_3} \in D$ $\boxed{* \text{ es cerrada}}$

e) En $E = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es primo}\}$, $a * b = a + b$

$\left.\begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases}\right\} x + y = 3 + 13 = 16 \Rightarrow \underbrace{D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}}_{\text{no es primo}} \Rightarrow (a+b) \notin E$

$\boxed{* \text{ NO es cerrada}}$

(3) Dadas las sig. operaciones a través de sus tablas, analizar si son cerradas, si son conmutativas, si poseen elemento neutro, elemento absorbente, elementos idempotentes y si todos tienen simétricos:

a) $A = \{a, b, c\}$

*	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	a
c	b	c	a

todos los elementos de la tabla $\in A$ ∴ $\boxed{* \text{ es cerrada}}$

→ No es simétrica ⇒ $\boxed{\text{No es conmutativa}}$

→ ninguna fila repite el encabezado ⇒ $\boxed{\nexists \text{ elemento neutro}}$

→ ningún elemento se repite en toda una fila ⇒ $\boxed{\nexists \text{ absorbente}}$

en la diagonal, solo el b tiene b

$\boxed{\text{elemento idempotente: } b}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

← Neutro

↑ Neutro

$\boxed{* \text{ es cerrada}}$ (todos los elementos $\in A$)

$\boxed{\cdot \text{ conmutativa}}$ (matriz simétrica)

$\boxed{\cdot \text{ Neutro: } 1}$

$\boxed{\cdot \text{ Idempotente: } 1}$

$\boxed{\cdot \text{ Absorbente: } \nexists}$

Simétricos (veo en donde hay un 1 → elemento neutro, dentro de la matriz)

$\boxed{1' = 1}$, $\boxed{2' = 3}$, $\boxed{3' = 2}$, $\boxed{4' = 4}$

c) $A = \{a, b, c\}$

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	A

$\boxed{* \text{ es cerrada}}$

$\boxed{* \text{ es conmutativa}}$

$\boxed{\cdot \text{ Elem. neutro: } b}$

$\boxed{\cdot \text{ elem. absorbente: } \nexists}$

$\boxed{\cdot \text{ elem. idemp: } b}$

$\boxed{\cdot \text{ simétricos: } a' = c,\ b' = b,\ c' = a}$

d) $A = \{x, y, z, w\}$

*	x	y	z	w
x	x	x	z	z
y	x	y	z	w
z	z	z	z	z
w	z	w	z	w

$\boxed{* \text{ es cerrada}}$

$\boxed{* \text{ es conmutativa}}$

$\boxed{\text{elem. neutro: } y}$

$\boxed{\text{elem. absorbente: } z}$

$\boxed{\cdot \text{ elem. idemp} = \{x, y, z, w\}}$

$\boxed{\text{simétricos } y' = y}$

U8

4) Para las seg. operaciones cerradas en los conjuntos indicados, analice si son asociativas, conmutativas, si tienen elem. neutro, y si todos los elem. poseen simétrico:

a) $a*b = a+b+a.b$ en $\mathbb{Z}$

- Asociatividad:

$\forall abc \in \mathbb{Z} : (a*b)*c = a*(b*c)$

$a*b = a+b+ab$

$b*c = b+c+bc$

- $(a*b)*c = (a+b+a.b)+c+(a+b+a.b)c =$ asociatividad de la + y distrib.

$= a+b+ab+c+ac+bc+abc \overset{\text{conmut. de la suma, y factor común y asoc.}}{=}$

$= a+(b+c+bc)+a(b+c+bc) = \boxed{a*(b*c)}$

$\boxed{* \text{ es asociativa}}$

- Conmutatividad

$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a*b = b*a$

$\boxed{a*b} = a+b+ab \overset{\text{conmut. +}}{=} b+a+ab \overset{\text{conmut. product}}{=} b+a+ba = \boxed{b*a}$

$\boxed{* \text{ es conmutativa}}$

- elemento neutro:

$\forall a \in A: e*a = a*e = a$

$\left\{\begin{array}{l} e*a = e+a+ea = a \Rightarrow e=0 \\ a*e = a+e+ae = a \Rightarrow e=0 \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{elemento neutro} = 0}$

- elementos simétricos

A tiene neutro $= e \Rightarrow a' \in A: a*a' = a'*a = e$

$a*a' = a+a'+aa' = 0$

$a+a'(a+1) = 0$

$\boxed{a' = \frac{-a}{a+1}}$ elem. Neutro $\forall a \in \mathbb{Z} - \{-1\}$

b) $x * y = x^2 + y^2$ en $\mathbb{R}$

- ¿$\forall xyz : (x*y)*z = x*(y*z)$?

$$\boxed{(x*y)*z} = (x^2+y^2)^2 + z^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^2 + z^2 \neq x^2 + (y^2+z^2)^2$$

$\boxed{\therefore \text{ NO es asociativa}}$ ✓

- ¿$x*y = y*x$?

$$\boxed{x*y = x^2+y^2 \overset{\text{conmut de la } +}{=} y^2+x^2 = y*x} \quad \boxed{* \text{ es conmutativa}}$$ ✓

- ¿$\exists e / x*e = e*x = x$?

$$\forall x \in \mathbb{R}: x*e = x^2+e^2 = e^2+x^2 = x \Rightarrow \underbrace{e^2 = x - x^2}_{\text{varía s/x}}$$

$\boxed{\therefore \nexists \text{ elem neutro}}$ ✓

no tiene simétrico

c) $a*b = \frac{a+b}{2}$ en $\mathbb{Q}$

- ¿$(a*b)*c = a*(b*c)$?

$$(a*b)*c = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b+2c}{4} \neq \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$$

$\boxed{\text{NO es asociativa}}$ ✓

- ¿$a*b = b*a$?

$$\boxed{a*b} = \frac{a+b}{2} \overset{\text{conmut } +}{=} \frac{b+a}{2} = \boxed{b*a} \quad \boxed{\text{es conmutativa}}$$ ✓

- ¿$\exists e / x*e = e*x = x$?

$$x*e = \frac{x+e}{2} = \overbrace{\frac{e+x}{2}}^{e*x} = x \Rightarrow e = 2x - x = x \Rightarrow e = x \text{ depende } x$$

$\boxed{\therefore \nexists \text{ neutro}}$ ✓

$\boxed{\nexists \text{ neutro} \Rightarrow \nexists \text{ simétrico}}$

d) $x * y = 3(x+y)$ en $\mathbb{Q}$

- ¿$\forall xyz$: $(x*y)*z = x*(y*z)$?

$(x*y)*z = 3(3(x+y)+z) = 9x+9y+3z$

$x*(y*z) = 3(x+3(y+z)) = 3x+9y+9z$

$\neq \therefore$ $\boxed{\text{NO es asociativa}}$

- ¿$x*y = y*x$?

$\boxed{x*y = 3(x+y) \overset{\text{conmut. }+}{=} 3(y+x) = y*x} \Rightarrow \boxed{\text{ES conmutativa}}$

- ¿$\exists e / x*e = e*x = x$?

$x*e = 3(x+e) = 3(e+x) = 3e+3x = x \Rightarrow e = \frac{-2x}{3}$ → depende de x $\therefore \boxed{\nexists \text{ neutro}}$

$\boxed{\nexists \text{ neutro} \Rightarrow \nexists \text{ simétricos}}$

e) $a*b = 2a+b$ en $\mathbb{Z}$

- $(a*b)*c = 2(2a+b)+c = 4a+2b+c$
  $a*(b*c) = 2a+(2b+c)$
  $\neq$ $\boxed{\text{NO es asociativa}}$
- $a*b = 2a+b \neq \overbrace{2b+a}^{b*a}$ $\therefore \boxed{\text{No es conmutativa}}$
- $\left.\begin{array}{l} a*e = 2a+e \\ e*a = 2e+a \end{array}\right\}$ $2a+e = 2e+a \Rightarrow a = e \Rightarrow$ depende del valor de a $\therefore \boxed{\nexists \text{ elem neutro}}$

f) $a*b = a^b$ en $\mathbb{N}$

- $(a*b)*c = (a^b)^c = a^{b \cdot c}$
  $a*(b*c) = a^{(b^c)}$
  $\neq$ $\boxed{\text{No es asociativa}}$

- $a*b = a^b$
  $b*a = b^a$
  $\neq$ $\boxed{\text{NO es conmutativa}}$

- ¿$a*e = e*a = a$?

  $a*e = a^e \neq e^a$
  $e*a = e^a$
  $\boxed{\text{No tiene elem. neutro}}$

⑤ Indique V o F, justificando:

a) Si $*$ es cerrada en un conjunto $A \wedge B \subseteq A \Rightarrow *$ es cerrada en B también

$\boxed{F}$ $A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{1,2\}$

A

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	1	4	2	3
3	2	1	1	1
4	2	2	2	2

B

*	1	2
1	2	3
2	1	4

→ No es cerrada pues $3, 4 \notin B$

b) Si $*$ es cerrada en un conjunto $B \wedge B \subseteq A \Rightarrow *$ es cerrada en A también

$\boxed{F}$ $A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,2\}$

*	1	2
1	1	1
2	1	2

es cerrada

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	4
3	1	3	9

$a * b = a^{(b-1)}$

No es cerrada

c) Si $*$ es asociativa en un conj. $\overbrace{A}^{hip 1} \wedge \overbrace{B \subseteq A}^{hip 2} \Rightarrow *$ es asociativa en B

$\boxed{V}$ $\forall a,b,c \in B \xRightarrow{hip 2} a,b,c \in A \xRightarrow{hip 1} (a*b)*c = a*(b*c) \Rightarrow$ es asociativa

d) Si $*$ tiene neutro en un conjunto $A \wedge B \subseteq A \Rightarrow *$ tiene neutro en B

$\boxed{F}$ $A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,2\}$

A

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3

B

*	1	2
1	1	1
2	1	1

3 es el neutro de A pero B no tiene neutro

e) Si $*$ es conmutativa en un conj. $B \wedge B \subseteq A \Rightarrow *$ es conmut. en A

$\boxed{F}$ $A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,2\}$

*	1	2	3
1	1	2	2
2	2	1	2
3	3	3	1

→ No es simétrica ⇒ No es conmut.

*	1	2
1	1	2
2	2	1

es conmut (es una matriz simétrica)

f) Si $*$ es conmutativa en $A \Rightarrow *$ es asociativa en A

$\boxed{F}$ el ejercicio 4d es un contraejemplo

g) Si $*$ no tiene neutro en un conjunto $A \Rightarrow$ no es conmutativa en A

$\boxed{F}$ el ejercicio 4d es un contraejemplo

II ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Propiedades

⑥ Indicar si los sig. conj. con las operaciones indicadas alcanzan la estructura de semigrupo o grupo, si tienen elemento neutro y si son abelianos:

a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$

- $\forall a,b \in \mathbb{Z} : a * b = \overbrace{a \cdot b}^{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \therefore$ $\boxed{\text{es cerrada}}$
- $\boxed{\text{es asociativa}}$ (en Enteros la multiplicación es asociativa)
- Elemento neutro : $\boxed{e = 1}$. $\forall a \in \mathbb{Z}, a.1 = a = 1.a$ ✓
- No tiene simétrico pues $a \cdot a' = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$
- E $\mathbb{Z}$ la multiplicación $\boxed{\text{es conmut}}$: $a.b = b.a$

$\boxed{(\mathbb{Z}, \cdot) \text{ es Monoide abeliano} = \text{semigrupo abeliano con neutro}}$ ✓

b) $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$

- $a * b = a \cdot b$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$ producto $\in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{es cerrada}}$
- la multiplicación asociativa en $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{es asociativa}}$
- $\boxed{e = 1}$ es el elemento neutro : $a * 1 = 1 * a = a$ / $\boxed{\text{tiene neutro}}$
- $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$: $a \cdot a' = a' a = e = 1 \Rightarrow \boxed{a' = \frac{1}{a}}$ $\boxed{\text{tiene simétrico}}$
- la multiplicación es conmutativa en $\mathbb{R}$ - $(a.b = b.a)$ $\boxed{\text{es conmutativa}}$

$\boxed{(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot) \text{ es grupo abeliano}}$ /

c) $(\mathbb{Q}, +)$

- la suma es cerrada en $\mathbb{Q}$ $\overset{\in \mathbb{Q}}{a}, \overset{\in \mathbb{Q}}{b} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$
- la suma es asociativa en $\mathbb{Q}$ $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $e = 0$ es el elemento neutro de la suma $a + 0 = 0 + b = 0$ /
- $a \cdot a' = a' \cdot a = e \Rightarrow a a' = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$
- la suma es conmutativa en $\mathbb{Q}$, $a + b = b + a$ /

$\boxed{(\mathbb{Q}; +) \text{ es grupo abeliano}}$ /

d) $(\{0,1\}^{2\times3};\vee)$

- $\forall A,B \in \{0,1\}^{2\times3}: A \vee B = C,\ c_{ij} = a_{ij} \vee a_{ij} \in \{0,1\}^{2\times3}$ $\boxed{\text{es cerrada}}$
- $\forall A,B,C \in \{0,1\}^{2\times3}\ (A\vee B)\vee C = A\vee(B\vee C)$ ✓ $\boxed{\text{es asociativa}}$
- $\boxed{e = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}$ pues $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix} = A$ ✓
- La única matriz que hace que $A \vee A' = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ es $A = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ No es simétrico
- $A \vee B = B \vee A \Rightarrow$ $\boxed{\text{es conmutativa}}$

$\boxed{(\{0,1\}^{2\times3}, \vee) \text{ es un MONOIDE abeliano}}$ ✓

e) $(\mathcal{P}(A), \cap)$

- $\forall X,Y \in \mathcal{P}(A): X\cap Y \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow$ $\boxed{\text{es cerrada}}$
- $(X\cap Y)\cap W = X\cap(Y\cap W) \Rightarrow$ $\boxed{\text{es asociativa}}$
- $\boxed{e = A}$ pues $X\cap A = A\cap X = X$ ✓ $\boxed{\text{tiene neutro}}$
- $\forall X \in \mathcal{P}(A), \nexists\ Y \in \mathcal{P}(A) \ /\ X\cap Y = A$ $\boxed{\text{no tiene simétrico}}$
- $X\cap Y = Y\cap X \Rightarrow$ $\boxed{\text{es conmutativa}}$

$\boxed{(\mathcal{P}(A), \cap) \text{ es Monoide abeliano}}$ ✓

f) $(\mathbb{N}, \wedge)$ ¿potencia?

- $\forall a,b \in \mathbb{N},\ a^b = \overbrace{a\,a\,a \ldots a}^{b \text{ veces}} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\boxed{\text{es cerrada}}$
- $(a^b)^c \neq a^{(b^c)} \Rightarrow$ ej: $(2^3)^4 = 2^{12} \neq 2^{(3^4)} = 2^{81}$ $\boxed{\text{No es asociativa}}$
- $\boxed{(\mathbb{N}, \wedge) \text{ NO llega ni a semigrupo}}$ ✓

g) $(\mathbb{Z}, *)$ con $a*b = a+b+1$

- $\forall a,b \in \mathbb{Z}: a+b \in \mathbb{Z},\ \underbrace{a+b}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{1}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{es cerrada}}$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: (a*b)*c \stackrel{?}{=} a*(b*c)$
  $(a+b+1)+c+1 = a+(b+c+1)+1$ ✓ $\boxed{\text{es asociativa}}$
- $e \Rightarrow a*e = e*a = a \Rightarrow a+e+1 = e+a+1 = a \Rightarrow \boxed{e=-1}$
- $a*a' = a'*a = e \Rightarrow a+a'+1 = a'+a+1 = -1 \Rightarrow \boxed{a' = -a-2}$
- $a*b = a+b+1 = b+a+1 = b*a \Rightarrow$ $\boxed{\text{es conmutativa}}$

$\boxed{(\mathbb{Z}, *) \text{ es grupo abeliano}}$

h) $(\overbrace{\{1,-1,i,-i\}}^{A};\ \cdot)$

- El producto es asociativo en complejos $\boxed{\text{es asociativo}}$

$\cdot$	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

- $\boxed{\text{es conmutativa}}$ ✓ simétricos: (busco los 1 en la tabla)
- $\boxed{e = 1}$

$1' = 1$ $\quad$ $i' = -i$

$-1' = -1$ $\quad$ $-i' = i$

tiene simétrico

- $\boxed{\text{es cerrada}}$

$\boxed{(\{1,-1,i,-i\},\cdot) \text{ es grupo abeliano}}$ ✓

i) $(D_{18}, *)$ $\quad x * y = mcm(x,y)$

$D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$

*	1	2	3	6	9	18
1	1	2	3	6	9	18
2	2	2	6	6	18	18
3	3	6	3	6	9	18
6	6	6	6	6	18	18
9	9	18	9	18	9	18
18	18	18	18	18	18	18

- Es cerrada (todos son elementos del conjunto)
- conmutativa (x la simetría)
- Neutro: 1 (se repite encabezado)
- Simétrico: solo el 1 (es el único 1 dentro de la matriz)
- es asociativa

$\boxed{(D_{18}, *) \text{ es monoide abeliano}}$ ✓

j) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; *)$ $\quad$ con $(x,y) * (z,t) = (x+z,\ y \cdot t)$

- $\forall x y z t \Rightarrow x+z \in \mathbb{Z} \wedge y.t \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,y) * (z,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ✓ $\boxed{\text{es cerrado}}$

- $[(x,y) * (z,t)] * (v,w) = (x,y) * [(z,t) * (v,w)]$

$(x+z,\ y.t) * (v,w) = (x,y) * [(z+v,\ t.w)]$

$(x+z+v,\ y.t.w) = (x+z+v,\ y.t.w)$ ✓ $\boxed{\text{es asociativo}}$

- $(x,y) * (z,t) = (x+z,\ y\,t) = (z+x,\ t.y) = (z,t) * (x,y) \Rightarrow \boxed{\text{es conmutativo}}$

- Neutro de la suma: 0, neutro del producto: 1 $\Rightarrow \boxed{e = (0,1)}$

$(x,y) * (0,1) \overset{\text{conmut.}}{=} (0,1) * (x,y) = (0+x,\ 1.y) = (x,y)$ ✓

- $(x,y) * (x',y') = e \Rightarrow (x+x',\ y.y') = (0,1) \Rightarrow (x',y') = (-x, \underbrace{\tfrac{1}{y}}_{\notin \mathbb{Z}})$ No tiene simétrico

$\boxed{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *) \text{ es monoide abeliano}}$ ✓

k) $(\mathbb{Z}_7, \bar{+})$

$\bar{+}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{1}$	1	2	3	4	5	6	0
$\bar{2}$	2	3	4	5	6	0	1
$\bar{3}$	3	4	5	6	0	1	2
$\bar{4}$	4	5	6	0	1	2	3
$\bar{5}$	5	6	0	1	2	3	4
$\bar{6}$	6	0	1	2	3	4	5

- es cerrada
- conmutativa
- Neutro $= \bar{0}$
- simétricos: $\bar{0}' = \bar{0}$, $\bar{1}' = \bar{6}$, $\bar{2}' = \bar{5}$, $\bar{3}' = \bar{4}$, $\bar{4}' = \bar{3}$, $\bar{5}' = \bar{2}$, $\bar{6}' = \bar{1}$

tiene simétrico

$$(\bar{x} * \bar{y}) * \bar{z} = (\bar{x} \bar{+} \bar{y}) * \bar{z} = \bar{x} \bar{+} \bar{y} + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} * (\bar{y} * \bar{z})$$

es asociativa

$\boxed{(\mathbb{Z}_7, \bar{+}) \text{ es grupo abeliano}}$ ✓

l) $(\mathbb{Z}_8, \bar{\cdot})$

$\bar{\cdot}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	4	5	6	7
$\bar{0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{2}$	0	2	4	6	0	2	4	6
$\bar{3}$	0	3	6	1	4	7	2	5
$\bar{4}$	0	4	0	4	0	4	0	4
$\bar{5}$	0	5	2	7	4	1	6	3
$\bar{6}$	0	6	4	2	0	6	4	2
$\bar{7}$	0	7	6	5	4	3	2	1

- es cerrada
- conmutativa
- $\boxed{e = \bar{1}}$
- simétricos: el $\bar{0}$ no tiene simétrico
- es asociativa

$$(\bar{x} * \bar{y}) * \bar{z} = (\bar{x} \bar{\cdot} \bar{y}) \bar{\cdot} \bar{z} = \bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = \bar{x} * (\bar{y} * \bar{z})$$

$\boxed{(\mathbb{Z}_{18}, \bar{\cdot}) \text{ es monoide abeliano}}$

m) $(\{X, -X, I, -I\}; \cdot)$ siendo $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

- $X \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\cdot$	X	$-X$	I	$-I$
X	I	$-I$	X	$-X$
$-X$	$-I$	I	$-X$	X
I	X	$-X$	I	$-I$
$-I$	$-X$	X	$-I$	I

- es cerrada
- conmutativa
- $\boxed{e = I}$
- simétricos: $X' = X$, $-X' = -X$, $I' = I$, $-I' = -I$
- tiene simétrico

El producto de matrices es asociativa:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

$\boxed{(\{X, -X, I, -I\}, \cdot) \text{ es grupo abeliano}}$

m) $(\{X, -X, I, -I\}; \cdot)$ siendo $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

o	X	-X	I	-I
X	X	-X	X	-X
-X	-X	X	-X	X
I	X	-X	I	-I
-I	-X	X	-I	I

- $X \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- es cerrada
- conmutativa
- $\boxed{e = I}$ ⇒ X no tiene simétrico (No hay I en la fila de X)
- es asociativa

$\boxed{(\{X, -X, I, -I\}; \cdot) \text{ es monoide abeliano}}$

o) $(S_3, \circ)$ siendo $S_3 = \{f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \,/\, f \text{ es biyectiva}\}$

↖ composición

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

(lo explica la ing. Piñeiro en un video)

$f_1 \circ f_2$ ⇒ 1º aplico f_2 y después f_1

$1 \xrightarrow{f_2} 1 \xrightarrow{f_1} 1$
$2 \to 3 \to 3$ f_2
$3 \to 2 \to 2$

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

- No es simétrica así que $\boxed{\text{NO es conmutativa}}$
- es cerrada
- $e = f_1$ → simétricos $f_1' = f_1$, $f_2' = f_2$, $f_3' = f_3$, $f_4' = f_6$, $f_5' = f_5$, $f_6' = f_4$

$\boxed{\text{tiene simétrico}}$

- la composición es asociativa

$\boxed{(S_3, \circ) \text{ es grupo}}$ (no abeliano

8)

$\bullet$	X	Y	Z
X	Y	X	Z
Y	X	Z	Y
Z	Z	Y	X

- es cerrada
- es conmutativa
- $\nexists$ neutro $\Rightarrow \nexists$ simétrico

Analizo si es asociativa

$$\left.\begin{array}{l}(X \bullet Y) \bullet Z = X \bullet Z = Z \\ X \bullet (Y \bullet Z) = X \bullet Y = X\end{array}\right\} \neq \text{ No es asociativa}$$

$\boxed{\text{No llega ni a semigrupo}}$ ✓

9)

⁘	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	e	d	a	c
c	c	a	e	b	d
d	d	c	a	e	b
e	e	d	b	c	a

- es cerrada
- No es conmutativa (la matriz no es simétrica)
- elem. neutro = a

Asociatividad

$$\left.\begin{array}{l}(a ⁘ b) ⁘ c = b ⁘ c = d \\ a ⁘ (b ⁘ c) = a ⁘ d = d\end{array}\right\} = ✓$$

$$\left.\begin{array}{l}(a ⁘ b) ⁘ d = b ⁘ d = a \\ a ⁘ (b ⁘ d) = a ⁘ a = a\end{array}\right\} = ✓$$

$$\left.\begin{array}{l}(d ⁘ c) ⁘ e = a ⁘ e = e \\ d ⁘ (c ⁘ e) = d ⁘ d = e\end{array}\right\} ✓$$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}(c ⁘ d) ⁘ e = b ⁘ e = c \\ c ⁘ (d ⁘ e) = c ⁘ b = a\end{array}\right\} \neq}_{\text{No es asociativa}}$$

$(a ⁘ d) ⁘ e = d ⁘ e = b$

$a ⁘ (d ⁘ e) = a ⁘ b =$

$\boxed{\text{No llega a ser semigrupo}}$

U8

7 Sea $(A, *)$ un grupo con neutro e. Demostrar:

explicado en el video parte 4 en Ing Piñeiro

a) El elemento neutro es único

Método de Reducción al absurdo.

Suponemos que tenemos e_1 y e_2, dos elementos neutros de A.

e_1 es neutro $\Rightarrow a * e_1 = a$, tomo $a = e_2 \Rightarrow e_2 * e_1 = e_2$

e_2 es neutro $\Rightarrow e_2 * b = b$, tomo $b = e_1 \Rightarrow e_2 * e_1 = e_1$

$\boxed{e_2 = e_1}$

$e_2 = e_1 \Rightarrow$ muestra la unicidad del elem. neutro

b) El elemento neutro es su propio simétrico $e' = e$

$\forall a \in A: a * e = e * a = a$

tomo $a = e \Rightarrow e * e = e \xrightarrow{\text{x simétrico}} e * e' = e \Rightarrow e = e'$

simétrico: $a * a' = e \xrightarrow{a' = e'} e * e' = e = e' * e$

c) Propiedad involutiva del simétrico: $\forall a \in A: (a')' = a$

Como $(A, *)$ es grupo $\Rightarrow$ todos los elementos tienen simétrico

$\forall a \in A \; \exists a' \in A: a * a' = e = a' * a$

$a' \in A \Rightarrow$ tiene que tener simétrico: $(a')' * a' = e$

opero con 'a' a derecha en ambos miembros: $(a')' * a' * a = e * a$

x asociatividad $(a')' * \underbrace{(a' * a)} = e * a$

$(a')' * e = e * a$

x definición de elem. Neutro $a * e = e * a = a$

$\boxed{(a')' = a}$

d) El simétrico de un elemento es único.

Como en a) voy a demostrarlo "por el absurdo" y voy a suponer que $\exists$ 2 simétricos de un elemento.

$(a')_1$ y $(a')_2$ son 2 simétricos de $a \Rightarrow (a')_1 * a = e$

opero con $(a')_2 \Rightarrow$ $\quad (a')_1 * \underbrace{a * (a')_2}_{} = e * (a')_2$

elemento neutro: $\quad (a')_1 * e = (a')_2$

elem neutro $\quad \boxed{(a')_1 = (a')_2}$

a' es único

e) $\forall a, b \in A : (a*b)' = b' * a'$

$(A, *)$ es grupo $\Rightarrow$ todos los elementos tienen neutro.

$(a*b)$ es un elemento $\Rightarrow \exists (a*b)' \mid (a*b) * (a*b)' = e$

$$(a*b) * (a*b)' = e$$

asociatividad $\quad (a * b * (a*b)') = e$

opero con a' $\quad a' * (a * b * (a*b)') = a' * e$

asoc. y neutro $\quad \underbrace{(a' * a)}_{e} * (b * (a*b)') = a'$

simétrico $\quad e * b * (a*b)' = a'$

neutro $\quad b * (a*b)' = a'$

opero con b' a izq $\quad \underbrace{b' * b}_{e} * (a*b)' = b' * a'$

simétrico $\quad e * (a*b)' = b' * a'$

neutro $\quad \boxed{(a*b)' = b' * a'}$

f) Los ecuaciones $a * x = b$ y $x * a = b$ tienen solución única

$a * x = b \qquad\qquad x * a = b$

$\underbrace{a' * a}_{e} * x = a' * b \qquad\qquad x * \underbrace{a * a'}_{e} = b * a'$

$\boxed{x = a' * b} \qquad\qquad \boxed{x = b * a'}$

Unicidad: Supongo que $\exists\ x_1$ y x_2

$\left.\begin{array}{l} a * x_1 = b \\ a * x_2 = b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a' * a * x_1 = a' * b \\ a' * a * x_2 = a' * b \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} (a' * a) * x_1 = a' * b \\ \underbrace{(a' * a)}_{e} * x_2 = a' * b \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a' * b = x_1 \\ a' * b = x_2 \end{array}\right\} x_1 = x_2$

g) El único elemento idempotente es el elemento neutro
ES decir, si $\underbrace{a * a = a} \Rightarrow a = e$

$a * a = a$

operamos con a' $\quad (a*a)*a' = a * a'$

x asociatividad $\quad a*(a*a') = a*a'$

x def. simetría $\quad a * e = e$

x def. elem. Neutro $\quad \boxed{a = e}$

h) $\forall a, b \in A : a' = b \Rightarrow b' = a$

Parto de la hipótesis: $\quad \boxed{a' = b}$

opero con a a derecha $\quad a' * a = b * a$

x def. Simétrico $\quad e = b * a$

opero con b' a izq. $\quad b' * e = \underbrace{b' * b} * a$

x def. Simetría $\quad b' * e = e * a$

x def. Neutro $\quad \boxed{b' = a}$

⑧ Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2; *_2)$ dos grupos con neutros e_1 y e_2 respectivamente.

En el conjunto $G_1 \times G_2$ se define la sig. operación $*$ tal que $(a,b) * (c,d) = (a *_1 c, b *_2 d)$. Demostrar que $(G_1 \times G_2, *)$ es grupo.

Parte 1: demostrar que $*$ es cerrada en $G_1 \times G_2$

$$\forall (a,b),(c,d) \in G_1 \times G_2 : (a,b) * (c,d) = (a *_1 c, b *_2 d),$$

como $*_1$ y $*_2$ son op. cerradas $\Rightarrow$ $a *_1 c$ es cerrada y $b *_2 d$ es cerrado

entonces $(a *_1 c, b *_2 d) \in G_1 \times G_2$

$\boxed{* \text{ es una operación cerrada}}$

Parte 2: demostrar que $*$ es asociativa

$$\forall (a,b),(c,d),(f,g) \in G_1 \times G_2 :$$

$$[(a,b) * (c,d)] * (f,g) = (a *_1 c, b *_2 d) * (f,g) = (a *_1 c *_1 f; b *_2 d *_2 g)$$

$$(a,b) * [(c,d) * (f,g)] = (a,b) * (c *_1 f, d *_2 g) = (a *_1 c *_1 f; b *_2 d *_2 g)$$

$\boxed{* \text{ es asociativa}}$

Parte 3: demostrar que $*$ tiene elemento neutro

$$\exists (e_1, e_2) \forall (a,b) \in G_1 \times G_2 : (e_1,e_2) * (a,b) = (a,b) * (e_1,e_2) = (a,b)$$

$$(e_1,e_2) * (a,b) = (e_1 *_1 a, e_2 *_2 b) \overset{*_1 \text{ y } *_2 \text{ tienen neutro}}{=} (a *_1 e_1, b *_2 e_2) = (a,b)$$

$\boxed{* \text{ tiene elem. Neutro} = (e_1, e_2)}$

Parte 4: demostrar que todos los elem. tienen simétrico

$$\forall (a,b) \in G_1 \times G_2, \exists (a',b') \in G_1 \times G_2 : (a,b) * (a',b') = (e_1, e_2)$$

$$(a,b) * (a',b') = (a *_1 a', b *_2 b') \overset{*_1 \text{ y } *_2 \text{ tienen simétrico}}{=} (e_1, e_2)$$

$$(a',b') * (a,b) = (a' *_1 a, b' *_2 b) = (e_1, e_2)$$

$\boxed{* \text{ tiene simétrico}}$

$\therefore \boxed{(G_1 \times G_2; *) \text{ es grupo}}$

U 8

⑨ En base al ej. 7 f) completar las tablas de los sig grupos finitos:

$(G = \{1,2,3,4,5,6\}; *)$

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	4	1	2	6	5
4	4	3	6	5	1	2
5	5	6	2	1	4	3
6	6	5	4	3	2	1

$e = 1$, $2' = 2$, $3' = 3$, $4' = 5$, $5' = 4$, $1' = 1$, $6' = 6$

está en un video teórico de Ing. Piñeiro

$(G = \{e, a, b, c, d\}; \bullet)$

$\bullet$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

$\boxed{e = e}$ $e' = e$, $a' = d$, $d' = a$, $c' = b$, $b' = c$

---

⑩ Indicar V o F, justificando:

a) Si $(A, *)$ es semigrupo entonces $(INV(A); *)$ es grupo

$\boxed{V}$ $INV(A) = \{a \in A \mid a' \in A\}$

$\forall a \in INV(A) : a' \in INV(A) \Rightarrow \underbrace{a * a' = e}_{\text{definición de simétrico}} \Rightarrow \exists e \in INV(A)$

b) $[$Si $(A, *)$ es semigrupo $\wedge \forall a, b, c \in A : a * b = a * c] \Rightarrow b = c$

$\boxed{F}$ $A = \mathbb{Z}$: $a * b = a + b^2$: $a * b \overset{a=5,\ b=1}{=} 5 + 1^2 = 6$, $a * c = 5 + (-1)^2 = 6$ $\} =$ pero $1 \neq -1$

$b = 1$, $c = -1$

c) Si $(G, *)$ es grupo entonces $(G, \circ)$ es grupo con $x \circ y = y * x$

$\boxed{V}$ · $\forall x y \in G$: $x \circ y = y * x \in G$ pues G $*$ $\boxed{\text{es cerrada}}$

· $\forall x y z \in G$: $(x \circ y) \circ z = (y * x) \circ z = z * y * x$
$x \circ (y \circ z) = x \circ (z * y) = z * y * x$ $\} = \checkmark$ $\boxed{\text{es asociativa}}$

· $x \circ e = e * x \underset{\text{def Neutro } *}{=} x * e = e \circ x = x * e = x$ $\boxed{\text{elem neutro} = e}$

$\forall x, y \in G$: $x \circ x' = x' * x \overset{\text{sim. } *}{=} e$
$x' \circ x = x * x' = e$ $\}$ $\boxed{\text{tiene simétrico}}$

$\boxed{(G, \circ) \text{ es grupo}}$

Subgrupos:

$(H,*)$ es subgrupo de $(G,*)$ si. $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ H \subseteq G \\ \forall a,b \in H \Leftrightarrow a*b' \in H \end{cases}$

II SUBGRUPOS. SUBGRUPOS CÍCLICOS. GENERADORES

(1) Indicar cuáles de los sig. conjuntos H son subgrupos del grupo indicado. Demostrar o justificar:

a) $H = \{x = 5 \cdot k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ de $(\mathbb{Z},+)$

- $x = 5k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow H \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $x = 5$ (o sea: $k=1$) $\in H$ ∴ $H \neq \emptyset$ ✓
- $\forall a,b \in H: b' = (-b) \Rightarrow a*b' = a + b' = a + (-b) =$
  $= \overbrace{5k_1}^{a} + (-5k_2) = 5\overbrace{(k_1 - k_2)}^{k_3 \in \mathbb{Z}} \Rightarrow a*b' \in H$ ✓

$\boxed{(H,*) \text{ es subgrupo de } (\mathbb{Z},+)}$

b) $H = \{x = 2k+1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ de $(\mathbb{Q}-\{0\};\cdot)$

- con $k=0$: $x = 1 \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$ ✓
- $\forall x \in H: x = 2 \cdot k + 1,\ k \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow H \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $\forall a,b \in H$: $a*b' = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{2k_1+1}{2k_2+1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \notin H$
  $(b' = \frac{1}{b})$ tomo $k_1 = 2$, $k_2 = 7$

$\boxed{H \text{ no es subgrupo de } (\mathbb{Q}-\{0\};\cdot)}$

$\nexists k \in \mathbb{Z} / 2k+1 = \frac{1}{3}$

c) $H = \{x = a + \sqrt{2}\, b \text{ con } a,b \in \mathbb{R}\}$ de $(\mathbb{R},+)$

elijo 1 valor cualquiera de

- $a,b \in \mathbb{R}$: $a = 1, b = 1 \Rightarrow x = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$ ✓
- $\forall x \in H$: $x = a + \sqrt{2}b$ con $a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow H \subseteq \mathbb{R}$ ✓
- $\forall x,y \in H$: $x * y' = x + (-y) = a + \sqrt{2}b + (-c - \sqrt{2}d) =$
  $(y' = -y)$
  $= \underbrace{(a-c)}_{\in \mathbb{R}} + \sqrt{2}\underbrace{(b-d)}_{\in \mathbb{R}} = e + \sqrt{2}f \in H$

$\boxed{H \text{ es subgrupo de } (\mathbb{R},+)}$

No es cerrada

d) $H = \{\bar{1}, \overline{17}\}$ de $(INV(\mathbb{Z}_{18}); \cdot)$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\overline{17}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\overline{17}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\bar{1}$

es cerrada $\therefore$ $\boxed{H \text{ es subgrupo de } (INV(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)}$

e) $H = \{1, i\}$ de $(\{1,-1, i, -i\}, \cdot)$

$\cdot$	1	i
1	1	i
i	i	-1

NO es cerrada $\therefore$ $\boxed{H \text{ NO es subgrupo de } (\{1,-1, i, -i\}, \cdot)}$

f) $H = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \right\}$ de $(M_2(\mathbb{R}); \cdot)$ matrices inversibles de orden 2

$\cdot$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ES cerrado $\therefore$

$\boxed{H \text{ es subgrupo de } (M_2(\mathbb{R}); \cdot)}$

13) Sea $(G,*)$ un grupo, H_1 y H_2 dos subgrupos de G.
Indicar V o F, justificando:

a) $H_1 \cup H_2$ es subgrupo de $(G,*)$ **F**

1 contraejemplo

G

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

H_1

*	a	b
a	a	b
b	b	a

es cerrada ✓

H_2

*	a	d
a	a	d
d	d	a

es cerrado ✓

$H_1 \cup H_2$

*	a	b	d
a	a	b	d
b	b	a	c
d	d	c	a

No es cerrado

$\boxed{H_1 \cup H_2 \text{ No es subgr. de } (G,*)}$

b) $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de $(G,*)$ **V**

- $\forall x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x \in H_1 \wedge x \in H_2 \xrightarrow{H_1 \text{ y } H_2 \text{ subgrupos}} x \in G \Rightarrow \boxed{H_1 \cap H_2 \subseteq G}$ ✓
- $H_1 \wedge H_2$ x def. de subgrupo $H_1 \neq \emptyset \wedge H_2 \neq \emptyset \wedge e \in H_1 \wedge e \in H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ ✓
- $\forall x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x, y \in H_1 \wedge x, y \in H_2 \longrightarrow x * y' \in H_1 \wedge x * y' \in H_2 \xRightarrow{\text{def } \cap}$

$$x * y' \in H_1 \cap H_2 \checkmark$$

$\boxed{H_1 \cap H_2 \text{ es subgrupo de } (G,*)}$

c) $H_1 - H_2$ es subgrupo de $(G,*)$ **F**

tomando el mismo ejemplo de a):

$H_1 - H_2 = \{b\}$

*	b
b	a

$\rightarrow$ No es cerrado $\therefore$ $\boxed{H_1 - H_2 \text{ no es subgrupo de } (G,*)}$

d) Si G es abeliano $\Rightarrow T = \{x = x_1 * x_2,$ con $x_1 \in H_1 \wedge x_2 \in H_2\}$ es subgrupo de $(G,*)$

- G es grupo, H_1 y H_2 subgrupos de $G \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \in G$ y $x_1 * x_2 \in G$ por ser una operación cerrada $\therefore$ $\boxed{T \subseteq G}$ ✓ y $\boxed{T \neq \emptyset}$ ✓

$$y = y_1 * y_2 \Rightarrow y' = (y_1 * y_2)' = y_2' * y_1'$$

$$\forall x y \in T: x * y' = (x_1 * x_2) * (y_2' * y_1')' = (x_1 * x_2) * (y_1'' * y_2'') =$$

$$= (x_1 * x_2) * (y_1 * y_2) \overset{\text{es abeliano (conmutativo)}}{=}$$

$$= (x_1 * y_1) * (x_2 * y_2), \quad \left.\begin{array}{l}(x_1 * y_1) \in H_1 \\ (x_2 * y_2) \in H_2\end{array}\right\} \in T \checkmark$$

$\boxed{T \text{ es subgrupo de } (G,*)}$

(14) Indicar cuáles de los sig. grupos son cíclicos. En caso de serlo, indicar todos sus generadores:

a) $(\mathbb{Z}, +)$

Es cíclico : Generadores: 1 y -1

b) $(A = \{a, b, c, d\}; *)$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

$\langle a \rangle = \{a\}$

$\langle b \rangle = \{b, a\}$

$\langle c \rangle = \{c, b, d, a\}$

$\langle d \rangle = \{d, b, c, a\}$

$\boxed{\text{Es cíclico}}$ $\boxed{\text{Generadores} = \{c, d\}}$

c) $(B = \{x, y, z, u, v, w\}, \bullet)$

$\bullet$	x	y	z	u	v	w
x	x	y	z	u	v	w
y	y	z	x	v	w	u
z	z	x	y	w	u	v
u	u	w	v	x	z	y
v	v	u	w	y	x	z
w	w	v	u	z	y	x

$\langle x \rangle = \{x\}$

$\langle y \rangle = \{y, z, x\} = \langle z \rangle$

$\langle u \rangle = \{u, x\}$

$\langle w \rangle = \{w, x\}$

$\langle v \rangle = \{v, x\}$

$\boxed{\text{No es cíclico}}$

d) $(\mathbb{Z}_7, \bar{+})$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{4}, \bar{1}, \bar{5}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{3}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{5}, \bar{3}, \bar{1}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}\}$

$\boxed{\text{Es cíclico. Generadores} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$

e) $(INV(\mathbb{Z}_8); \bullet)$

$INV(\mathbb{Z}_8) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\bullet$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\langle 1 \rangle = \{1\}$

$\langle 3 \rangle = \{3, 1\}$

$\langle 5 \rangle = \{5, 1\}$

$\langle 7 \rangle = \{7, 1\}$

$\boxed{\text{No es cíclico}}$

- $(\mathbb{Z}_m, +)$ es cíclico
- Generadores de $(\mathbb{Z}_m,+)$: $\bar{k}$ / mcd $(k,n) = 1$
- #Subgrupos de $\mathbb{Z}_m = |D_m|$
- cada cardinal tiene a uno de los elementos de D_n

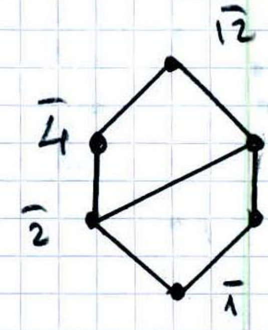
14

15) Dados los sig. grupos, hallar todos los subgrupos. Graficar la red de subgrupos con la inclusión.

a) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$

Generadores = $\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}\}$

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \longrightarrow$



D_{12}

isomorfa con

$|D_{12}| = 6 \Rightarrow$ hay 6 subgrupos

#1: $H_1 = \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

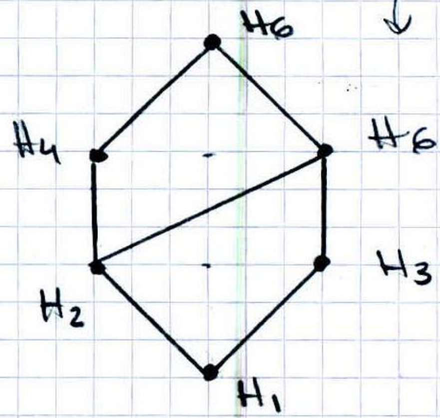
#2: $H_2 = \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{6}, \bar{0}\}$

#3: $H_3 = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{4}, \bar{8}, \bar{0}\}$

#4: $H_4 = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{0}\}$

#6: $H_5 = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$

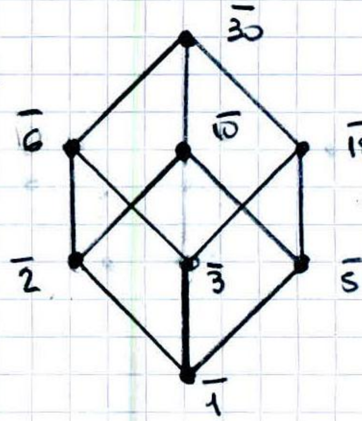
#12: $H_6 = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_{12}$



b) $(\mathbb{Z}_{30}; +)$

$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \longrightarrow$

$|D_{30}| = 8$



#1: $H_1 = \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

#2: $H_2 = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{15}, \bar{0}\}$

#3: $H_3 = \langle \bar{10} \rangle = \{\bar{10}, \bar{20}, \bar{0}\}$

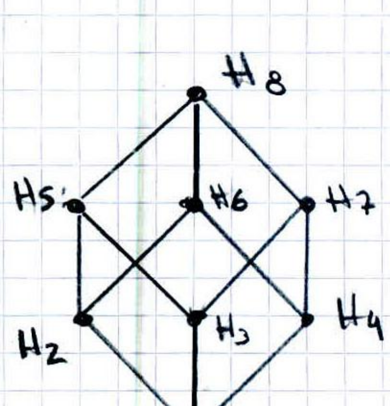
#5: $H_4 = \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{6}, \bar{12}, \bar{18}, \bar{24}, \bar{0}\}$

#6: $H_5 = \langle \bar{5} \rangle = \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}, \bar{25}, \bar{0}\}$

#10: $H_6 = \langle 3 \rangle = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{21}, \bar{24}, \bar{27}, \bar{0}\}$

#15: $H_7 = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}, \bar{22}, \bar{24}, \bar{26}, \bar{28}, \bar{0}\}$

#30: $H_8 = \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{30}$



c) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 ; +)$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \\ \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \end{array}\right\} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \{\overset{a}{(\bar{0},\bar{0})}, \overset{b}{(\bar{0},\bar{1})}, \overset{c}{(\bar{0},\bar{2})}, \overset{d}{(\bar{0},\bar{3})}, \overset{e}{(\bar{1},\bar{0})}, \overset{f}{(\bar{1},\bar{1})}, \overset{g}{(\bar{1},\bar{2})}, \overset{h}{(\bar{1},\bar{3})}\}$$

$H_1 = \langle(0,0)\rangle = \{(0,0)\}$

$H_5 = \langle(0,1)\rangle = \{(0,1), (0,2), \overbrace{(0,3)}^{(0,1)^{3}}, (0,0)\} = \overbrace{\langle(0,3)\rangle}^{\text{pues } (0,1)^3 = (0,3)}$

$H_2 = \langle(0,2)\rangle = \{(0,2), (0,0)\}$

$H_3 = \langle(1,0)\rangle = \{(1,0), (0,0)\}$

$H_6 = \langle(\bar{1},\bar{1})\rangle = \{(1,1), (0,2), \overbrace{(1,3)}^{(1,1)^{3}}, (0,0)\} = \langle(1,3)\rangle$

$H_4 = \langle(1,2)\rangle = \{(1,2), (0,0)\}$

$H_7 = \{(0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\}$

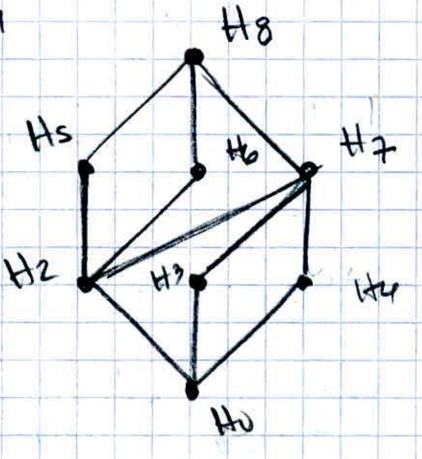
$H_8 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	e	f	g	h	a
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	e	b	c	h	e	f	g
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	g	h	e	b	c	d	a
g	g	h	e	f	c	d	a	b
h	h	a	f	g	a	a	b	c

Subgrupo $= \{a, c, e, g\}$

	a	c	e	g
a	a	c	e	g
c	c	a	g	e
e	e	g	a	c
g	g	e	c	a

✓



d) $(\{1, -1, i, -i\} ; \cdot)$

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

$\langle 1 \rangle = \{1\}$

$\langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$

$\langle i \rangle = \{i, -1, -i, 1\} = \langle -i \rangle$ $\quad i^3$

es cíclico

$H_1 = \{1\}$

$H_2 = \{-1, 1\}$

$H_3 = \{1, -1, i, -i\}$

$INV(\mathbb{Z}_n) \Rightarrow$ todos los k / mcd $(n, k) = 1$

ej 15)

e) $(INV(\mathbb{Z}_8), \cdot)$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

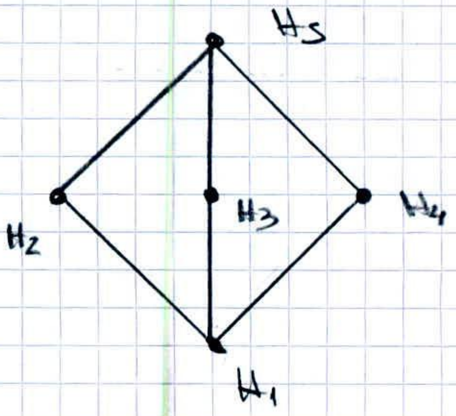
$\langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1}\} = H_1$

$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{3}, \bar{1}\} = H_2$

$\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{5}, \bar{1}\} = H_3$

$\langle \bar{7} \rangle = \{\bar{7}, \bar{1}\} = H_4$

$H_5 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$



f) $(S_3, \circ)$

(ver tabla en ej. 6 a))

$H_1 = \langle f_1 \rangle = \{f_1\}$ $\quad$ f_1 es el neutro

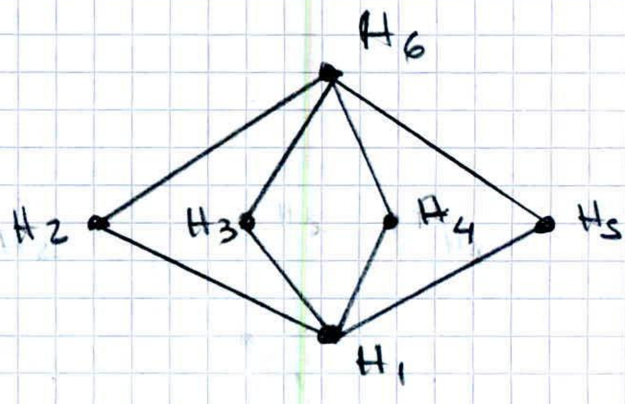
$H_2 = \langle f_2 \rangle = \{f_2, f_1\}$

$H_3 = \langle f_3 \rangle = \{f_3, f_1\}$

$H_5 = \langle f_4 \rangle = \{f_4, f_6, f_1\} = \langle f_6 \rangle$

$H_4 = \langle f_5 \rangle = \{f_5, f_1\}$

$H_6 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \rangle$



$a \sim b \Rightarrow (a * x) \sim (b * x) \Rightarrow$ es compatible a derecha

$a \sim b \Rightarrow (x * a) \sim (x * b) \Rightarrow$ " " a izq.

16

- Si es compatible a izq y a derecha $\Rightarrow$ R es compatible
- Si R es simétrica $\Rightarrow$ si es compatible a izq, lo es también a derecha

IV Relación de equivalencia compatible. Subgrupo normal. Grupo cociente

(16) Analizar si las sig. relaciones de equivalencia son compatibles con la estructura indicada:

a) $aRb \iff a^2 = b^2$ con la estructura del grupo $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$

$$aRb \wedge cRd \xrightarrow{\text{def. relación}} a^2 = b^2 \wedge c^2 = d^2 \Rightarrow a^2 \cdot c^2 = b^2 \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot c^2 = b^2 \cdot d^2 \Rightarrow (a.c)^2 = (b.d)^2$$

$$\xrightarrow{\text{def. Relación}} (a.c) R (b.d) \Rightarrow \boxed{\text{es compatible}}$$

b) $aRb \iff 5 \mid (a-b)$ con la estructura del grupo $(\mathbb{Z}, +)$

$a - b = 5k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$aRb \wedge cRd \xrightarrow{\text{def. relac.}} a - b = 5k_1 \wedge c - d = 5k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b) + (c-d) = 5k_1 + 5k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+c) - (b+d) = 5\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \mid (a+c) - (b+d) \Rightarrow (a+c) R (b+d) \Rightarrow \boxed{\text{es compatible}}$$

c) $(a,b) R (c,d) \iff b = d$ con la estructura del grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$

$$(a,b) R (c,d) \wedge (x,y) R (u,v) \Rightarrow b = d \wedge y = v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b + y = d + y \xrightarrow{\text{def. relación}} b + y = d + v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(a,b) + (x,y)] \, R \, [(c,d) + (u,v)] \Rightarrow \boxed{\text{es compatible}}$$

d) La relación $R = \{(a,c)^{①}, (c,a)^{②}, (b,d)^{③}, (d,b)^{④}\} \cup \Delta A$ en $(A = \{a,b,c,d\}, *)$

$\Delta A \to \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$

*	d	b	a	c
d	d	b	a	c
b	b	d	c	a
a	a	c	d	b
c	c	a	b	d

Matriz simétrica $\Rightarrow$ * es conmutativa

Como M_R es una matriz simétrica $\Rightarrow$ si es compatible a derecha también lo es a izquierda (y viceversa)

① y ② $a \sim c$:

$\forall a$: $a * a \overset{?}{\sim} c * a \Rightarrow (d \sim b) \in R$ ✓ ④

$\forall b$: $a * b \overset{?}{\sim} c * b \Rightarrow (c \sim a) \in R$ ✓ ②

$\forall c$: $a * c \overset{?}{\sim} c * c \Rightarrow b \sim d \in R$ ✓ ③

$\forall d$: $a * d \overset{?}{\sim} c * d \Rightarrow a \sim c \in R$ ✓ ①

③ y ④ $b \sim d$:

$b * a \overset{?}{\sim} d * a \Rightarrow (c \sim a) \in R$ ✓

$b * b \overset{?}{\sim} d * b \Rightarrow d \sim b \in R$ ✓

$b * c \overset{?}{\sim} d * c \Rightarrow a \sim c \in R$ ✓

$b * d \overset{?}{\sim} d * d \Rightarrow (b \sim d) \in R$ ✓

en ΔA también se cumple (por reflexividad)

$\boxed{\text{es compatible}}$

$(G,*)$ grupo, H subgrupo de G. H es subgrupo normal $\Leftrightarrow$ las clases a derecha coinciden con las clases a izquierda
abeliano

(17) Indicar si los sig. subgrupos de los grupos dados son normales. En caso afirmativo hallar el grupo cociente, de lo contrario, de las particiones a derecha e izquierda. Justificar.

a) $H = \langle \bar{2} \rangle$ en $(\mathbb{Z}_{10}, +)$

Recordar que $(\mathbb{Z}_m, +)$ es grupo abeliano

$H = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{0}\}$

$\boxed{\text{Si } |G| = 2|H|} \Rightarrow H$ es normal y las particiones son H y el otro subgrupo tiene los elementos restantes

Si $(G,*)$ es abeliano $\Rightarrow$ todos los subgrupos son normales

$H = \langle \bar{2} \rangle$ es normal, $\dfrac{\mathbb{Z}_{10}}{H} = \{\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{0}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}\}\}$

b) $H = \{f_1, f_6\}$ en $(S_3, \circ)$

$(S_3, \circ)$ No es abeliano $\therefore$ tengo que hallar las particiones

(Ver tabla del ej. 6. c))

$\overline{f_1}_d = H * f_1 = \{f_1, f_6\} * f_1 = \{f_1 \circ f_1, f_6 \circ f_1\} = \{f_1, f_6\} = \overline{f_6}_d$

$\overline{f_2}_d = H * f_2 = \{f_1 \circ f_2, f_6 \circ f_2\} = \{f_2, f_5\} = \overline{f_5}_d$

La tercera clase es la formada por los elementos restantes $\overline{f_4}_d = \{f_4, f_3\}$

$$P_d = \{\{f_1, f_6\}, \{f_2, f_5\}, \{f_4, f_3\}\}$$

$\overline{f_1}_i = f_1 \circ \{f_1, f_6\} = \{f_1 \circ f_1, f_1 \circ f_6\} = \{f_1, f_6\}$, $\overline{f_2}_i = \{f_2 \circ f_1, f_2 \circ f_6\} = \{f_2, f_3\} \Rightarrow \overline{f_3}_i = \{f_5, f_4\}$

$$P_i = \{\{f_1, f_6\}, \{f_2, f_3\}, \{f_5, f_4\}\}$$

$P_d \neq P_i \Rightarrow H$ NO es NORMAL

c) $H = \langle \bar{4} \rangle$ en $(INV(\mathbb{Z}_{15}); \cdot)$

$INV(\mathbb{Z}_{15}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$

$|INV(\mathbb{Z}_{15})| = 8$ — Cant clases $= 4$ $\quad 8/2$

$|H| = 2$

$H = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{4}, \bar{1}\}$

$(INV(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$ es abeliano $\Rightarrow H$ es normal

$\overline{1}_d = \{\bar{4}, \bar{1}\}$ $\quad \overline{2}_d = \{\bar{8}, \bar{2}\}$ $\quad \overline{7}_d = \{\overline{13}, \bar{7}\}$ $\Rightarrow \overline{11}_d = \{\overline{11}, \overline{14}\}$

$$INV(\mathbb{Z}_{15})/H = \{\{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{8}\}, \{\bar{7}, \overline{13}\}, \{\overline{11}, \overline{14}\}\}$$

17) d) $H = \langle -1 \rangle$ en $(A = \{1, -1, i, -i\}, \cdot)$

(Ver ej. 15.d)) $H = \langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$ A es cíclico $\Rightarrow$ A es abeliano
A es abeliano $\Rightarrow$ H es normal

$\overline{-1}_d = \{-1, 1\} \Rightarrow \overline{i}_d = \{i, -i\}$

$$\boxed{A/_H = \{\{-1, 1\}, \{i, -i\}\}}$$ ✓

e) $H = \{(x; 0) / x \in \mathbb{R}\}$ en $(\mathbb{R}^2, +)$

- $+$ es cerrada en $\mathbb{R}^2$ ✓
- $+$ es conmut. en $\mathbb{R}^2$
- $e = (0,0)$ neutro ✓
- $(x,0)' = (-x, 0) \Rightarrow +$ es simétrica en $\mathbb{R}^2$
- $+$ es asoc. en $\mathbb{R}^2$

$\therefore (\mathbb{R}^2, +)$ es grupo abeliano $\Rightarrow$ $\boxed{\text{H es normal}}$

Falta terminar

f) $H = \{a, g\}$ en el grupo $(A, \otimes)$ dado por la sig. tabla:

$\otimes$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	h	g	e	f
c	c	d	a	b	f	e	h	g
d	d	a	b	c	g	h	f	e
e	e	g	f	h	a	c	b	d
f	f	h	e	g	c	a	d	b
g	g	f	h	e	d	b	a	c
h	h	e	g	f	b	d	c	a

$H = \{a, g\}$

$\overline{a}_d = H = \overline{g}_d$

$\overline{b}_d = \{a \otimes b, g \otimes b\} = \{b, f\} = \overline{f}_d$

$\overline{c}_d = \{a \otimes c, g \otimes c\} = \{c, h\} = \overline{h}_d$

$\therefore \overline{d}_d = \overline{e}_d = \{e, d\}$

$$\boxed{P_d = \{\{a, g\}, \{b, f\}, \{c, h\}, \{d, e\}\}}$$ ✓

$\left.\begin{array}{l} \overline{a}_i = H = \overline{g}_i \\ \overline{b}_i = \{b \otimes a, b \otimes g\} = \{b, e\} \end{array}\right\} \boxed{P_i = \{\{a, g\}, \{b, e\} \{f, d\}, \{c, h\}\}}$ ✓

$$\boxed{P_d \neq P_i \therefore \text{H NO es normal}}$$ ✓

(18) Indicar V o F, justificando:

a) Un grupo de cardinal 32 puede tener un subgrupos de orden 6

F Es falso pues $6 \nmid 32$

b) El índice del subgrupo $H = \langle 12 \rangle$ en $(\mathbb{Z}_{36}, +)$ es 3.

$H = \langle \bar{12} \rangle = \{ \bar{12}, \bar{24}, \bar{0} \} \Rightarrow |H| = 3$, $|\mathbb{Z}_{36}| = 36$ F

$|H| = 3 \Rightarrow H$ es de orden 3

Índice de H: $\dfrac{|\mathbb{Z}_{36}|}{|H|} = \dfrac{36}{3} = \boxed{12 = \text{índice} \neq 3}$

c) Si G es un grupo y H un subgrupo de G, tales que $|G| = 2k$ y $|H| = k$, entonces H es subgrupo normal de G

V pues hay $\dfrac{|G|}{|H|}$ cantidad de clases $\Rightarrow$ #clases $= \dfrac{2k}{k} = 2$

$\Rightarrow$ hay 2 clases de equiv, de los que H es una de ellas.

d) Los grupos de cardinales primos no tienen subgrupos propios

V. Un grupo de cardinal p tiene subgrupos de orden n, donde $n \mid p$. Si p es primo $\Rightarrow$ solo hay 2 clases: la trivial y el subgrupo impropio.

e) Si H, K son subgrupos de un grupo finito G, tales que $|H| = 36$ y $|K| = 24$ los posibles órdenes de $H \cap K$ son 2 y 3 únicamente

$mcm(36, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$. Si $|G| = 72 \Rightarrow H$ y K pueden ser subgrupos

$H = \langle \bar{2} \rangle = \{ \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, 14, 16, \bar{18}, 20, 22, \bar{24}, \ldots \}$ todos los pares ≤ 70

$K = \langle \bar{3} \rangle = \{ \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}, \bar{18}, 21, \bar{24}, 27, 30, \ldots \}$ F

$H \cap K = \{ \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}, \bar{24}, \ldots \}$ tiene más $\underbrace{\text{de 3 elementos}}_{\text{orden} > 3}$

f) El elemento $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ del grupo $(M_2(\mathbb{Q}); \cdot)$ es de orden 4

$H = \langle A \rangle = \{ A, -I, -A, I \} \Rightarrow \boxed{|H| = \text{orden de } H = 4}$ V

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$A \cdot A = -I$ $\quad -I \cdot A = -A$ $\quad -A \cdot A = I$

$f: (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ es homomorfismo 1) $f(e_1) = e_2$
2) $\forall a \in G_1: f(a') = f(a)'$

si f es inyectiva $\Rightarrow$ monomorfismo
f sobrey. $\Rightarrow$ epimorfismo
f biyectiva $\Rightarrow$ isomorfismo

$Nu(f) = \{x \in G_1 / f(x) = e_2\}$ 18

V Homomorfismo. Grupos isomorfos

19 Analizar si las sig. funciones son homomorfismos de grupos. En caso afirmativo, clasificarlos y hallar el núcleo:

a) $f: (\mathbb{Z};+) \to (\underbrace{3\mathbb{Z}}_{\text{múltiplos de 3}},+) \ / \ f(x) = 3 \cdot x$

• $f(x) = 3x$ es función ✓ y es biyectiva

• $\forall a\, b \in \mathbb{Z}: f(a+b) = 3(a+b) = 3a+3b = f(a)+f(b)$ ✓

$\boxed{\text{es Homomorfismo}}$

$\boxed{f \text{ es isomorfismo}}$

• $Nu(f) = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) = \overset{0}{e_2}\} \to f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{Nu(f) = \{0\}}$ ✓

b) $g: (\mathbb{Z};+) \to (\mathbb{Z}_4, \bar{+}) \ / \ g(x) = \bar{x}_{(4)}$

• $\forall x, y \in \mathbb{Z}: g(x) = g(y) \overset{?}{\Rightarrow} x \overset{?}{=} y$

dem $\forall x, y \in \mathbb{Z}: g(x) = g(y) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ pero x puede ser $\neq y$

contraej. $x = 4, y = 8: g(4) = g(8) = \bar{0}$ pero $4 \neq 8$

$\boxed{\text{No es inyectiva}}$

quiero ver si se cumple

¿$\forall b \in \mathbb{Z}_4: \exists a \in \mathbb{Z} / b = g(a)$?

dem. $\forall b \in \mathbb{Z}_4: \exists a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ se cumple (todas las clases van a tener algún elemento)

$\boxed{g \text{ es sobreyectiva}}$

• $\forall a\, b \in \mathbb{Z}: g(a+b) = \overline{a+b}_{(4)} = \bar{a} \bar{+} \bar{b} = g(a) \bar{+} g(b)$ ✓

$\boxed{\text{es homomorfismo}}$

$\boxed{f \text{ es epimorfismo}}$ ✓

• $Nu(g) = \{x \in \mathbb{Z} / g(x) = e_2\} \Rightarrow g(x) = \bar{0}_{(4)}$

$\boxed{Nu(g) = \{x \in \mathbb{Z} / x = 4k,\ k \in \mathbb{Z}\}}$ ✓

c) $t:(\mathbb{R};+) \to (\mathbb{R}-\{0\},\cdot) \,/\, t(x)=e^x$

H?. $\forall a,b \in \mathbb{R}: t(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = t(a) \cdot t(b)$ ✓

$\boxed{\text{es homomorfismo}}$

I?. $\forall a,b \in \mathbb{R}: t(a) = t(b) \Rightarrow e^a = e^b \Rightarrow \ln(e^a) = \ln(e^b)$

$\Rightarrow a \ln(e) = b \ln(e) \Rightarrow a = b$ ✓ $\boxed{\text{es inyectiva}}$

S?. $\forall b \in \mathbb{R}-\{0\}: \overset{?}{\exists} a \in \mathbb{R} \,/\, b = f(a)$: $\nexists$ pues si $b<0 \Rightarrow \nexists a / e^a<0$

No es sobreyectiva

$\boxed{t \text{ es monomorfismo}}$ ✓

N: $Nu(t) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, t(x) = e_2\} \Rightarrow t(x) = 1 = e^x \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{Nu(t)=\{0\}}$

d) $h:(\mathbb{Z}_6,+) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3,+) \,/\, h(\bar{x}) = (\bar{x}_{(2)}, \bar{x}_3)$ son clases

H?. $\forall x,y \in \mathbb{Z}_6: h(x,y) = (\overline{x+y}_{(2)}, \overline{x+y}_{(3)}) = (\bar{x}_{(2)}+\bar{y}_{(2)}, \bar{x}_{(3)}+\bar{y}_{(3)}) =$

$= (\bar{x}_{(2)}, \bar{x}_{(3)}) + (\bar{y}_{(2)}, \bar{y}_{(3)}) = h(\bar{x}) + h(\bar{y})$ ✓

$\boxed{\text{es homomorfismo}}$

I?. $x=\bar{0}$: $h(\bar{0}) = (0,0) = (\bar{y}_{(2)}, \bar{y}_{(3)}) \Rightarrow y_{6} = \bar{0}$

$x=\bar{1}$: $h(\bar{1}) = (1,1) = (\bar{y}_{(2)}, \bar{y}_{(3)}) \Rightarrow y_{(6)} = \bar{1}$

$x=\bar{2}$: $h(\bar{2}) = (0,2) =$ " $\Rightarrow y_{(6)} = \bar{2}$

$x=\bar{3}$: $h(\bar{3}) = (1,0) =$ " $\Rightarrow y_{(6)} = \bar{3}$

$x=\bar{4}$: $h(\bar{4}) = (0,1) =$ " $\Rightarrow y_{(6)} = \bar{4}$

$x=\bar{5}$: $h(\bar{5}) = (1,2) =$ " $\Rightarrow y_{(6)} = \bar{5}$

$x = y \Rightarrow \boxed{\text{es inyectiva}}$

• $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \; \exists \, w \in \mathbb{Z}_6 \,/\, (\bar{x},\bar{y}) = h(w) = (\bar{w}_{(2)}, \bar{w}_{(3)})$ ✓

$\boxed{\text{es sobreyectiva}}$

$\boxed{h \text{ es isomorfismo}}$

• $Nu(h) = \{x \in \mathbb{Z}_6 \,/\, h(x) = e_2\}$ $\quad h(x) = (0,0) \Rightarrow \boxed{Nu(h) = \{(0,0)\}}$ ✓

20) Considerar el grupo (INV ($\mathbb{Z}_8$); •) y analizar si es isomorfo al sig.:

Si lo es, definir el isomorfismo. De lo contrario, justificar.

*	d	b	a	c
d	d	b	a	c
b	b	d	c	a
a	a	c	d	b
c	c	a	b	d

INV ($\mathbb{Z}_8$)

•	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	1	3	5	7
$\bar{3}$	3	1	7	5
$\bar{5}$	5	7	1	3
$\bar{7}$	7	5	3	1

$e_1 = d$ $\quad$ $e_2 = \bar{1}$

$\boxed{\text{son isomorfos}}$

$f(\bar{1}) = d$

$f(\bar{3}) = b$

$f(\bar{5}) = a$

$f(\bar{7}) = c$

21) Considera el grupo (INV ($\mathbb{Z}_{14}$), •) y analizar si es isomorfo a ($\mathbb{Z}_6$, +). Si lo es definir el isomorfismo. Si no, justificar.

$INV(\mathbb{Z}_{14}) = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

•	1	3	5	9	11	13
1	1	3	5	9	11	13
3	3	9	1	13	5	11
5	5	1	11	3	13	9
9	9	13	3	11	1	5
11	11	5	13	1	9	3
13	13	11	9	5	3	1

$e_1 = 1$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	0	1	2	3	4	5
$\bar{1}$	1	2	3	4	5	0
$\bar{2}$	2	3	4	5	0	1
$\bar{3}$	3	4	5	0	1	2
$\bar{4}$	4	5	0	1	2	3
$\bar{5}$	5	0	1	2	3	4

$e_2 = \bar{0}$

- 1° asigno el neutro

Observo la diagonal ppal

- 2°: $a * a = e$

- $3 \cdot 3 = 11 \cdot 11 = 9$
- $5 \cdot 5 = 9 \cdot 9 = 11$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\bar{0}) = 1 \\ f(\bar{1}) = 3 \\ f(\bar{2}) = 9 \\ f(\bar{3}) = 13 \\ f(\bar{4}) = 11 \\ f(\bar{5}) = 5 \end{array}\right.$$

$\bar{1} + \bar{1} = \bar{4} + \bar{4} = \bar{2}$

$\bar{5} + \bar{5} = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$

está en el video de álicia (parte 7)

22) Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo abeliano entonces $f: G \to G / f(x) = x'$ es isomorfismo

conmut.

(H): $\forall a, b \in G: f(a * b) = (a * b)' = b' * a' = a' * b' = f(a) * f(b)$ ✓

$\boxed{\text{es homomorfismo}}$

(I): $\forall a, b \in G: f(a) = f(b) \Rightarrow a' = b' \Rightarrow (a')' = (b')' \Rightarrow a = b$ ✓ $\boxed{\text{es inyectiva}}$

(S): $\forall b \in G: \exists a \in G / b = f(a) \Rightarrow$ si tomo $a = b' \Rightarrow b = f(b') = b'' = b$ ✓

$\boxed{\text{es sobreyectiva}}$

∴ es BIYECTIVA

$\boxed{\text{f es biyectiva} \Rightarrow \text{es ISOMORFISMO (además es AUTOMORFISMO)}}$

(23) Considerar los grupos $(G_1, *)$ y $(G_2, +)$ con neutros e_1 y e_2 respectivamente. Si $F: G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos. Se pide definir el núcleo y probar que es un subgrupo Normal de G_1

Es homomorfismo $\therefore \forall a,b \in G_1 : F(a*b) = F(a) + F(b)$ (I)

$$\boxed{Nu(F) = \{x \in G_1 \,/\, F(x) = e_2\}}$$

Quiero mostrar que $Nu(F)$ es subgrupo normal de G_1

- $F(e_1) = e_2 \Rightarrow Nu(F) \neq \emptyset$ ✓
- $Nu(F) \subseteq G_1$ (por definición de Núcleo)
- $\forall x\,y \in Nu(F) : F(x) = e_2 \wedge F(y) = e_2 \Rightarrow F(x) = e_2 \wedge [F(y)]' = e_2' = e_2$

$$\Rightarrow F(x) = e_2 \wedge F(y') = e_2 \Rightarrow F(x) + F(y') = e_2$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} F(x * y') = e_2 \Rightarrow x * y' \in Nu(F)$$

$\therefore$ $\boxed{Nu(F) \text{ es subgrupo de } G_1}$

Analizo "normalidad"

- $\forall y \in G_1 : cl(y)_d = Nu(F) * y = \{(x_i * y) \; i \in [1,n]\}$ $\quad x_i \in Nu(F)$

$F(x_i * y) = F(x_i) + F(y) = e_2 + F(y) = F(y) \Rightarrow cl(y)_d = \{y = F(y)\}$

- $\forall y \in G_1 : cl(y)_i = y * Nu(F) = \{y * x_i \, , \, i \in [1,n]\}$

$F(y * x_i) = F(y) + F(x_i) = F(y) + e_2 = F_y \Rightarrow cl(y)_i = \{y = F(y)\}$

$$\boxed{cl(y)_d = cl(y)_i \Rightarrow Nu(F) \text{ es subgrupo NORMAL}}$$

VI) EJERCICIOS COMBINADOS O INTEGRADORES (tipo examen)

(24) Sea $(G, *)$ un grupo dado por la sig. tabla:

*	a	b	c	d	e	f
a	c	f	d	a	b	e
b	f	d	e	b	c	a
c	d	e	a	c	f	b
d	a	b	c	d	e	f
e	b	c	f	e	a	d
f	e	a	b	f	d	c

$\boxed{e = d}$

a) Indicar si es un grupo cíclico, justificando. Si lo es, indicar los generadores

- $\langle a \rangle = \{a, c, d\} = \langle c \rangle$
- $\langle b \rangle = \{b, d\}$
- $\langle d \rangle = \{d\}$
- $\langle e \rangle = \{e, a, b, c, f, d\} = \langle f \rangle \Rightarrow$ generan a G $\therefore$ $\boxed{\text{es cíclico}}$

b) Considerar el subgrupo generado por b y hallar el grupo cociente (conjunto cociente y tabla de su operación)

$H = \{b, d\}$

La matriz dada es simétrica $\therefore$ $(G, *)$ es grupo abeliano $\Rightarrow P_d = P_i$

$\bar{a}_d = \{b*a, d*a\} = \{f, a\}$

$\bar{c}_d = \{b*c, d*c\} = \{e, c\}$

$$\boxed{G/_H = \{\{a,f\}, \{b,d\}, \{c,e\}\}}$$

tabla: $A = \{a, f\}$ $B = \{b, d\}$ $C = \{c, e\}$

*	af	bd	ce
a	c e	f a	d b
f	e c	a f	b d
b	f a	d b	e c
d	a f	b d	c e
c	d b	e c	a f
e	b d	c e	f a

$\rightarrow$

*	A	B	C
A	C	A	B
B	A	B	C
C	B	C	A

(25) Considerar el grupo $(A = \{0,2,4,6\}, *)$ con la operación dada por:

$$a * b = \begin{cases} a+b & \text{si } a+b \leq 6 \\ a+b-8 & \text{si } a+b > 6 \end{cases}$$

a) Hacer la red de subgrupos

*	0	2	4	6
0	0	2	4	6
2	2	4	6	0
4	4	6	0	2
6	6	0	2	4

$e_* = 0$

$H_1 = \langle 0 \rangle = \{0\}$

$H_3 \ \langle 2 \rangle = \{2,4,6,0\} = \langle 6 \rangle$ $\underbrace{\text{genera } A}$

$H_2 = \langle 4 \rangle = \{4,0\}$

$\langle 2 \rangle = \langle 6 \rangle$ son generadores

$\boxed{(A, *) \text{ es grupo cíclico}}$

b) Considerar el grupo multiplicativo de los inversibles de $\mathbb{Z}_4$. Definir en el conj. $INV(\mathbb{Z}_4) \times A$, la operación del grupo producto, indicar el neutro, el simétrico de cada elemento.

$G_1 = (INV(\mathbb{Z}_4); \bullet)$ $\qquad INV(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ $\qquad G_2 = (INV(\mathbb{Z}_4) \times A, \Diamond)$

•	1	3
1	1	3
3	3	1

$e_\bullet = \bar{1}$

$INV(\mathbb{Z}_4) \times A = \{(\bar{1},0),(\bar{1},2),(\bar{1},4),(\bar{1},6),(\bar{3},0),(\bar{3},2),(\bar{3},4),(\bar{3},6)\}$

Defino $\Diamond : (a,b) \Diamond (c,d) = (a \bullet c ; b * d)$ $\qquad e_2 = (\bar{1}, 0)$ $\quad e_\bullet \quad e_*$

Simétricos:

$(\bar{1},0)' = (\bar{1},0)$ $\qquad (\bar{3},0)' = (\bar{3},0)$

$(\bar{1},2)' = (\bar{1},6)$ $\qquad (\bar{3},2)' = (\bar{3},6)$

$(\bar{1},4)' = (\bar{1},4)$ $\qquad (\bar{3},4)' = (\bar{3},4)$

$(\bar{1},6)' = (\bar{1},2)$ $\qquad (\bar{3},6)' = (\bar{3},2)$ ✓

c) Hallar el grupo cociente para $H = \langle(\bar{3},2)\rangle$

$|G_2| = 8$

$H = \langle(\bar{3},2)\rangle = \{(\bar{3},2),(\bar{1},4),(\bar{3},6),(\bar{1},0)\}$ $\qquad |H| = 4$

$$\boxed{G_2/_H = \{ \{(\bar{3},2),(\bar{1},4),(\bar{3},6),(\bar{1},0)\}, \{(\bar{1},2),(\bar{1},6),(\bar{3},0),(\bar{3},4)\} \}}$$ ✓

26) Sean los grupos $\overbrace{(A=\{1,-1\};\cdot)}^{G_1}$ y $\overbrace{(B=\mathbb{Z}_4;+)}^{G_2}$

a) Definir $*$ para que $(A\times B,*)$ sea grupo.

G_1

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$e_1 = 1$

G_2

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$e_2 = \bar{0}$.

G_1 y G_2 son grupos $\Rightarrow$ propongo mantener sus respectivas operaciones

$$\boxed{(a,b)*(c,d) = (a\cdot c,\ b+d)}$$

b) Indicar si $(A\times B,*)$ es grupo abeliano y si es cíclico. Justificar.

$*$	$(1,\bar{0})$	$(1,\bar{1})$	$(1,\bar{2})$	$(1,\bar{3})$	$(-1,\bar{0})$	$(-1,\bar{1})$	$(-1,\bar{2})$	$(-1,\bar{3})$
$(1,\bar{0})$	$(1,\bar{0})$	$(1,\bar{1})$	$(1,\bar{2})$	$(1,\bar{3})$	$(-1,\bar{0})$	$(-1,\bar{1})$	$(-1,\bar{2})$	$(-1,\bar{3})$
$(1,\bar{1})$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(-1,0)$
$(1,\bar{2})$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(-1,0)$	$(-1,1)$
$(1,\bar{3})$	$(1,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(-1,3)$	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$
$(-1,\bar{0})$	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(-1,\bar{1})$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(-1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,0)$
$(-1,\bar{2})$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(-1,\bar{3})$	$(-1,3)$	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(1,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$

$\overbrace{(A\times B,*)}^{G_3}$ es grupo

$e = (1,\bar{0})$

La matriz es simétrica, entonces G_3 es abeliano

Hallo los generadores:

- $\boxed{H_1 = \langle(1,\bar{0})\rangle = \{(1,\bar{0})\}}$ trivial

- $\langle(1,\bar{1})\rangle = \{(1,\bar{1}),(1,\bar{2}),(1,\bar{3}),(1,\bar{0})\} = \langle(1,\bar{3})\rangle$
- $\langle(1,\bar{2})\rangle = \{(1,\bar{2}),(1,\bar{0})\}$
- $\langle(-1,\bar{0})\rangle = \{(-1,\bar{0}),(1,\bar{0})\}$
- $\langle(-1,\bar{1})\rangle = \{(-1,\bar{1}),(1,\bar{2}),(-1,\bar{3}),(1,\bar{0})\} = \langle(-1,\bar{3})\rangle$
- $\langle(-1,\bar{2})\rangle = \{(-1,\bar{2}),(1,\bar{0})\}$

$\boxed{\text{Ninguno genera a } G_3 \therefore \text{ NO es cíclico}}$

c) Analizar si $(A\times B,*)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_8,+)$. En caso de serlo, definir el isomorfismo, de lo contrario, justificar.

$(\mathbb{Z}_8,+)$ es un grupo cíclico mientras que $(A\times B,*)$ no lo es, por lo tanto, no son isomorfos entre sí.

identidad

(27) Dado el conjunto $F = \{f_1 = x, f_2 = \frac{1}{x}, f_3 = -x, f_4 = -\frac{1}{x}\}$ formado por funciones definidas de $\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$

a) Demostrar que es un grupo bajo la composición de funciones $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

$$f_1 \begin{cases} f_1[f_1(x)] = f_1(x) = x \Rightarrow \boxed{f_1 \circ f_1 = f_1} \\ f_1[f_2(x)] = f_1(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f_1 \circ f_2 = f_2} \\ f_1[f_3(x)] = f_1(-x) = -x \Rightarrow \boxed{f_1 \circ f_3 = f_3} \\ f_1[f_4(x)] = f_1(-1/x) = -1/x \Rightarrow \boxed{f_1 \circ f_4 = f_4} \end{cases}$$

$$f_2 \begin{cases} f_2[f_1(x)] = f_2(x) \Rightarrow \boxed{f_2 \circ f_1 = f_2} \\ f_2[f_2(x)] = f_2(\frac{1}{x}) = x \Rightarrow \boxed{f_2 \circ f_2 = f_1} \\ f_2[f_3(x)] = f_2(-x) = -1/x \Rightarrow \boxed{f_2 \circ f_3 = f_4} \\ f_2[f_4(x)] = f_2(-\frac{1}{x}) = -x \Rightarrow \boxed{f_2 \circ f_4 = f_3} \end{cases}$$

$$f_3 \begin{cases} f_3[f_1(x)] = f_3(x) = -x \Rightarrow \boxed{f_3 \circ f_1 = f_3} \\ f_3[f_2(x)] = f_3(1/x) = -1/x \Rightarrow \boxed{f_3 \circ f_2 = f_4} \\ f_3[f_3(x)] = f_3(-x) = x \Rightarrow \boxed{f_3 \circ f_3 = f_1} \\ f_3[f_4(x)] = f_3(-1/x) = 1/x \Rightarrow \boxed{f_3 \circ f_4 = f_2} \end{cases}$$

$$f_4 \begin{cases} f_4[f_1(x)] = f_4(x) = -1/x \Rightarrow \boxed{f_4 \circ f_1 = f_4} \\ f_4[f_2(x)] = f_4(1/x) = -x \Rightarrow \boxed{f_4 \circ f_2 = f_3} \\ f_4[f_3(x)] = f_4(-x) = 1/x \Rightarrow \boxed{f_4 \circ f_3 = f_2} \\ f_4[f_4(x)] = f_4(-1/x) = x \Rightarrow \boxed{f_4 \circ f_4 = f_1} \end{cases}$$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

$e = f_1$

- es cerrada.

como $(F, \circ)$ es finito, entonces $\boxed{\text{es grupo}}$ (alcanza con que sea una operación cerrada)

b) Analizar si el grupo anterior es isomorfo al siguiente:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

los elementos que están en la posición ij de * es igual al subíndice de los elementos de la posición ij de la tabla $\circ$

Son isomorfismos

$$\begin{cases} g(f_1) = 1 \\ g(f_2) = 2 \\ g(f_3) = 3 \\ g(f_4) = 4 \end{cases}$$

U8

28 Sea el grupo $\overbrace{(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, *)}^{G}$ con $(a,b)*(c,d) = (a +_2 c,\ b +_4 d)$ y el subconjunto $H = \{\overset{a}{(0,0)}, \overset{b}{(0,2)}, \overset{c}{(1,0)}, \overset{d}{(1,2)}\}$

a) Analizar si H es subgrupo de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Si lo es, indicar si H es o no cíclico y si es o no subgrupo Normal.

G

*	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,0)
(0,2)	(0,2)	(0,3)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,3)	(1,0)	(1,1)
(0,3)	(0,3)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,3)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,0)
(1,2)	(1,2)	(1,3)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(0,3)	(0,0)	(0,1)
(1,3)	(1,3)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(0,3)	(0,0)	(0,1)	(0,2)

son clases

es simétrica ⇒ G es conmut.

∴ $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, *)$ es grupo ABELIANO

Los subgrupos son Normales

Armo tabla de H y observo si es grupo (o sea: si es cerrado)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

H es grupo

$\boxed{\text{H es subgrupo de G}}$

Como G es grupo abeliano

$\boxed{\text{H es subgrupo Normal}}$

$\left.\begin{array}{l} \langle a \rangle = \{a\} \\ \langle b \rangle = \{b, a\} \\ \langle c \rangle = \{c, a\} \\ \langle d \rangle = \{d, a\} \end{array}\right\}$ Ninguno genera H ⇒ $\boxed{\text{H no es cíclico}}$

b) Analizar si (H,*) es isomorfo al sig. grupo:

◇	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

} ⇒ es igual que la tabla de H que armé considerando: a = (0,0), b = (0,2), c = (1,0), d = (1,2)

(H,*) es isomorfa con,

Isomorfismo : $\begin{cases} f((0,0)) = a \\ f((0,2)) = b \\ f((1,0)) = c \\ f((1,2)) = d \end{cases}$

(29) Para el conj. $A = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ con la operación $*$ definida:

$$a^n * a^m = a^{n+m} \quad \text{si } n+m < 6 \quad \text{y}$$
$$a^n * a^m = a^{n+m-6} \quad \text{si } n+m \geq 6$$

a) Probar que $(A, *)$ es un grupo conmutativo

$*$	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
a^0	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
a^1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^0
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^0	a^1
a^3	a^3	a^4	a^5	a^0	a^1	a^2
a^4	a^4	a^5	a^0	a^1	a^2	a^3
a^5	a^5	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4

- $e = a^0$
- $*$ es cerrada ✓
- $*$ conmutativa (matriz simétrica)
- $*$ es asociativa
- simétricos: $a^{0'} = a^0$ ✓, $a^{1'} = a^5$, $a^{2'} = a^4$, $a^{3'} = a^3$, $a^{4'} = a^2$, $a^{5'} = a^1$ $\Big\}$ $*$ op. simétrica

$\boxed{(A, *) \text{ Es grupo abeliano}}$ (conmutativo)

b) Hallar todos los subgrupos y su red. Analizar si es Álgebra de Boole

$|A| = 6 \Rightarrow$ subgrupos de cardinales: 1, 2, 3, 6

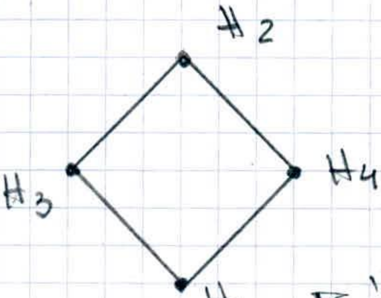
$\langle a^0 \rangle = \{a^0\} = H_1$

es cíclico.

$\langle a^1 \rangle = \{a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^0\} = \langle a^5 \rangle = H_2$

$\langle a^2 \rangle = \{a^2, a^4, a^0\} = \langle a^4 \rangle = H_3$

$\langle a^3 \rangle = \{a^3, a^0\} = H_4$



$\overline{H_1} = H_2$
$\overline{H_2} = H_1$
$\overline{H_3} = H_4$
$\overline{H_4} = H_3$

Es álgebra de Boole

c) Considerar el subgrupo generado por a^2, hallar el conjunto cociente y verificar que es un grupo. Justificar.

$(A, *)$ es grupo cíclico. $|A| = 6$, $|H| = 3 \Rightarrow |A| = 2|H|$

$$A/H = \Big\{ \underbrace{\{a^2, a^4, a^0\}}_{\overline{a^2}}, \underbrace{\{a^1, a^3, a^5\}}_{\overline{a^1}} \Big\}$$

$*$	1	3	5	0	2	4
1	2	4	0	1	3	5
3	4	0	2	3	5	1
5	0	2	4	5	1	3
0	1	3	5	0	2	4
2	3	5	1	2	4	0
4	5	1	3	4	0	2

$\bar{*}$	$\overline{a^1}$	$\overline{a^2}$
$\overline{a^1}$	$\overline{a^2}$	$\overline{a^1}$
$\overline{a^2}$	$\overline{a^1}$	$\overline{a^2}$

30) Sea $(G,*)$ grupo dado por la sig. tabla:

*	D	I	S	N	E	Y
D	D	I	S	N	E	Y
I	I	D	E	Y	S	N
S	S	N	D	I	Y	E
N	N	S	Y	E	D	I
E	E	Y	I	D	N	S
Y	Y	E	N	S	I	D

a) Calcular todos los subgrupos de G. Dibujar la red de subgrupos e indicar si G es un grupo cíclico

$H_1 = \langle D \rangle = \{D\}$

$H_2 = \langle I \rangle = \{I, D\}$

$H_3 = \langle S \rangle = \{S, D\}$

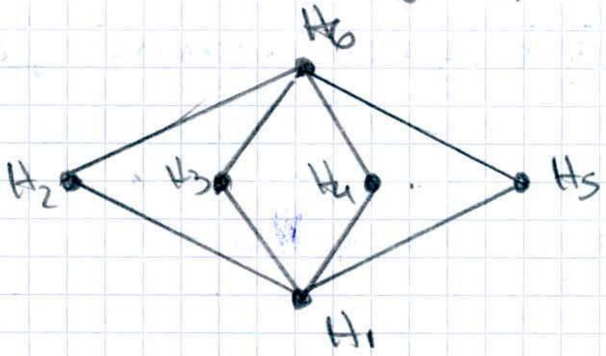
$H_5 = \langle N \rangle = \{N, E, D\} = \langle E \rangle$

$H_4 = \langle Y \rangle = \{Y, D\}$

$H_6 = G$

Ninguno genera G

$\boxed{\therefore \text{ NO es cíclico}}$



b) Considerar el subgrupo generado por S y hallar las particiones que producen en G a derecha e izquierda. ¿es subgrupo normal? Si no lo es, indicar un subgrupo que lo sea.

$H = \langle S \rangle = \{D, S\}$

$\overline{I}_d = \{D * I, S * I\} = \{I, N\}$ $\Big\}$ $P_d = \{\{D,S\}, \{I,N\}, \{E,Y\}\}$

$\overline{I}_i = \{I * D, I * S\} = \{I, E\} \Rightarrow P_i = \{\{D,S\}, \{I,E\}, \{N,Y\}\}$ $\neq$

$\boxed{H \text{ No es subgrupo NORMAL}}$

H_5 es un subgrupo normal pues $|H_5| \cdot 2 = |G|$

$$\boxed{G/_{H_5} = \{\{N,E,D\}, \{I,S,Y\}\}}$$

c) ¿Es el grupo dado isomorfo a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$? Si lo es, definir el isomorfismo. Si no, justificar por qué no lo es.

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ $\underbrace{\text{es conmutativo}}_{\text{es abeliano}}$ y $(G, *)$ no lo es $\therefore$ $\boxed{\text{NO son ISOMORFOS}}$

31) Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de $(\mathbb{Z},+)$

a) Probar que: $H = H_1 + H_2 = \{x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in H_1 \wedge x_2 \in H_2\}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$.

- $H_1 \wedge H_2$ 2 subgrupos $\therefore$ $e \in H_1$ y $e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 + H_2 \Rightarrow \boxed{H \neq \emptyset}$ ✓
- $\forall x \in H: x = x_1 + x_2$, $+$ es operación cerrada en $\mathbb{Z} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$

$\boxed{H \subseteq \mathbb{Z}}$ ✓

- $\forall x y \in H: x * y' = x + (-y) = x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) =$

$= (x_1 + (-y_1)) + (x_2 + (-y_2)) = \underbrace{(x_1 * y_1')}_{\in H_1} * \underbrace{(x_2 * y_2')}_{\in H_2} \Rightarrow \boxed{x * y' \in H}$ ✓

dos subgrupos de H

b) ¿es H un subgrupo normal? justificar.

$(\mathbb{Z},+)$ es un grupo abeliano $\Rightarrow \forall H$ subgrupo de $(\mathbb{Z},*)$ es $\boxed{\text{Normal}}$

---

32) Sea $(G,*)$ un ~~sub~~ grupo y H_i una familia de subgrupos de G.
Demostrar que la intersección de todos esos subgrupos es un subgrupo de G.

- Hipótesis: $(G,*)$ es grupo, $(H_i,*)$ subgrupos de G

$$H = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

- tesis: $(H,*)$ es subgrupo de G
- Dem: H_i es subgrupo $\Rightarrow e \in$ a todos los $H_i \Rightarrow \underbrace{e \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i}$

$e \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$ ✓

- $\forall i \in [1,m]$ $H_i \subseteq G$ por ser subgrupo $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} H_i \subseteq G$

$\boxed{H \subseteq G}$ ✓

- $\forall a b \in H: a,b \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i \Rightarrow a,b \in H_i \Rightarrow a * b' \in H_i$ (por ser subgrupo)

$\Rightarrow a * b' \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i \Rightarrow \boxed{a * b' \in H}$ ✓

33) Considerar el grupo $GM_2(\mathbb{Q})$ formado por las matrices inversibles de 2X2 con coeficientes racionales y la operación producto matricial.

a) Mostrar que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene orden 4. Dar el conjunto que genera y probar que es un grupo.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e de $GM_2(\mathbb{Q})$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\langle A \rangle = \{ A, -I, -A, I \} = H$$

$|H| = 4 \Rightarrow H$ tiene orden 4

•	A	-A	I	-I
A	-I	I	A	-A
-A	I	-I	-A	A
I	A	-A	I	-I
-I	-A	A	-I	I

- es cerrada
- asociativa
- conmutativa
- $e = I$
- simétricos: $A' = -A, \quad -A' = A \quad I' = I \quad -I' = -I$

es grupo

b) Indicar si el subgrupo generado por la matriz A es isomorfo al 4-grupo de Klein. Justificar

4-grupo de Klein: grupo formado por 4 elementos donde c/u es su inverso (en la diag. ppal está el elemento neutro)

Si un grupo tiene en su diagonal ppal, todos el elemento neutro $\Rightarrow \forall a \in H \Rightarrow a \cdot a = e \Rightarrow$ ninguno genera todo el grupo

4-grupo de Klein NO es cíclico. y el grupo visto en a) sí lo es (A genera todo el grupo)

$\boxed{\text{No son isomorfos}}$

$$\begin{array}{cccccc} B & C & A & D & E & F \end{array}$$

(34) Se sabe que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w^2 \\ w & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

con $w^3 = 1 \wedge w \neq 1$, alcanza la estructura de grupo bajo la multiplicación de matrices.

Indicar el orden de los posibles subgrupos, hallar el subgrupo generado por $A = \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ e indicar si dicho subgrupo es normal.

En caso afirmativo, hallar el grupo cociente asociado.

$|G| = 6 \Rightarrow$ cardinales posibles de los subgrupos $= 1, 2, 3, 6$

$\therefore$ posibles órdenes : $1, 2, 3, 6$

A $\begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ $\quad w^4 = \underbrace{w^3}_{1} w$ $\quad \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ A

A $\begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} w^4 & 0 \\ 0 & w^2 \end{matrix}} \xRightarrow{w^3=1} A.A = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} w^3 & 0 \\ 0 & w^3 \end{matrix}} \rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← neutro

$$H = \langle A \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es normal pues $|H| = \frac{|G|}{2}$.

$$\boxed{G/H = \left\{ \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \right\}}_{H_1}, \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w^2 \\ w & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^2 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{H_2} \right\}}$$

•	A	B	C	D	E	F
A	C	A	B			
B	A	B	C	D	E	F
C		C				
D		D		B		
E		E				
F		F				

$D \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{B}$

Con esto me alcanza para armar la tabla

$H_1 = H$

•	H_1	H_2
H_1	H_1	H_2
H_2	H_2	H_1